

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTRE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION ♦♦♦ EXAMEN DU BACCALAUREAT ♦♦♦ SESSION DE JUIN 2006	SESSION PRINCIPALE SECTIONS : SCIENCES EXP. + TECHNIQUE EPREUVE : MATHÉMATIQUES DURÉE : 3 heures COEFFICIENT : 3
---	---

EXERCICE 1 : (5 points)

L'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit $S = \{ M(x,y,z) \in \mathcal{E} ; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0 \}$.

- 1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.
- 2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x - 2y + 2z + 2 = 0$
 - a) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle \mathcal{C} .
 - b) Déterminer les coordonnées du centre A et le rayon r du cercle \mathcal{C} .
- 3) Soit M (a, b, -1) un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan dont une équation cartésienne est : $(a - 1)x + (b + 2)y + z - a + 2b + 3 = 0$
 - a) Montrer que M appartient au plan Q.
 - b) Montrer que S et Q sont tangents en M.

EXERCICE 2 : (5 points)

I – Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + i\sqrt{3}z - i = 0$

II – Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On considère l'équation dans \mathbb{C} :

$$(E) \quad z^2 + (2i \sin \theta)z - 2i \cos \theta = 0.$$

- 1) a) Vérifier que $(\cos^2 \theta + i)^2 = -\sin^2 \theta + 2i \cos \theta$.
- b) Résoudre l'équation (E).
- 2) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a = i$, $b = \cos \theta + (1 - \sin \theta)i$ et $c = -\cos \theta - (1 + \sin \theta)i$
 - a) Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.
 - b) Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O. Quel est le rayon de ce cercle ?

PROBLEME : (10 points)

I – Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -2x^2 + 2 - \text{Log } x$

- 1) Etudier le sens de variation de g.
- 2) Calculer g(1). En déduire que

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 & \text{pour } x \in]0, 1] \\ g(x) < 0 & \text{pour } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

II – On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-1 + \text{Log } x}{x} - 2x + 2e$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
- c) Dresser le tableau de variation de f.
- 2) a) Montrer que la droite D d'équation $y = -2x + 2e$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.
- b) Etudier la position de \mathcal{C} par rapport à D.
- 3) a) Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0, 1]$. Montrer que h est une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera ; on désignera par h^{-1} la fonction réciproque de h.
- b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, 1]$ une solution unique x_0 et que x_0 appartient à $]0, 4 ; 0, 5[$.
- 4) Tracer, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la droite D, la courbe \mathcal{C} et la courbe \mathcal{C}' de h^{-1} .

II – Soit $\alpha \in]0, 1[$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} , l'asymptote D et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

- 1) Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} (\text{Log } \alpha)^2 - \text{Log } \alpha$.
- 2) Déterminer α pour que $\mathcal{A}(\alpha)$ soit égale à $\frac{3}{2}$.