REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2006

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (4 points)

θ étant un réel de l'intervalle $[\,0, 2\pi\,[$; on pose pour tout nombre complexe z

$$f_\theta(z) = z^2 - (\,i + e^{i\theta}\,)z + (\,1 + i\,)(-1 + e^{i\theta})$$

1) a – Vérifier que $f_\theta(1 + i) = 0$
b – En déduire les solutions z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(\,O, \vec{u}, \vec{v}\,)$ on considère les points A, B et M d'affixes respectives -1, $i\sqrt{3}$ et $-1 + e^{i\theta}$.
a – Montrer que lorsque θ varie dans $[\,0, 2\pi\,[$, M varie sur un cercle ($\mathscr{C}$) de centre A dont on précisera le rayon.
b – Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle ($\mathscr{C}$).

EXERCICE 2 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre [AB]. On désigne par F le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et par Δ la perpendiculaire à (AB) en A.

La tangente à $\mathscr{C}$ en F coupe la droite Δ en un point A'. Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer F et de directrice (AB).

1) a – Montrer que le point A' appartient à la parabole $\mathscr{P}$.
b – Préciser la tangente à $\mathscr{P}$ en A'.

2) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point B et soit B' le point d'intersection de cette tangente avec la droite (A'F).
Montrer que le triangle A'OB' est rectangle.

3) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par F et parallèle à (AB) et K le projeté orthogonal de F sur (AB).
a – Soit M un point de $\mathscr{D}$ distinct de F et soit H son projeté orthogonal sur la droite (AB).
Montrer que si M appartient à la parabole $\mathscr{P}$, alors FMHK est un carré.
b – En déduire une construction des deux points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec la parabole $\mathscr{P}$.

PROBLEME (10 points)

Soit f la fonction définie sur $[\,0, +\infty\,[$ par $f(x) = x + \text{Log}(1 + e^{-2x})$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\,O, \vec{i}, \vec{j}\,)$

A – 1) a – Dresser le tableau de variation de f.
b – Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation y = x est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
c – Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$
d – Tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $(\,O, \vec{i}, \vec{j}\,)$

2) a – Montrer que f est une bijection de $[\,0, +\infty\,[$ sur $[\,\text{Log}\,2, +\infty\,[$
b – Construire la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction f^{-1} réciproque de f.

3) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$
a – Montrer que pour tout t de $[\,0, +\infty\,[$ on a

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

b – En déduire que pour tout x de $[\,0, +\infty\,[$ on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}\,(1 + x) \leq x$$

c – En déduire un encadrement de $\text{Log}(1 + e^{-2t})$ pour tout t de $[\,0, +\infty\,[$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par S_n la mesure de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations x = 0 et x = n.
a – Montrer que $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{8}e^{-4n} \leq S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$
b – Montrer que (S_n) est convergente vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

B – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \int_0^{\text{Log}2} dx$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{\text{Log}2} [f'(x)]^n\,dx$

1) Calculer u_0 et u_1.

2) a – Montrer que pour x de $[\,0, \text{Log}\,2\,]$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}$
b – En déduire que pour tout entier naturel n

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \text{Log}\,2.$$

c – Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3) a – Montrer que pour tout x de $[\,0, +\infty\,[$ on a $1 - f''(x) = [\,f'(x)\,]^2$
b – Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on a $u_n = u_{n-2} - \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$
c – En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{2n} = u_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k}$$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k$
Montrer que (v_n) converge vers un réel que l'on déterminera.