# Cahiers du baccalauréat 2006

# Examen du baccalauréat

## Epreuve : Mathématiques

## Section : Mathématiques

## SESSION PRINCIPALE 2006

**<u>Solutions de l' exercice 1</u> :**

1) a) $f_\theta\ (1+i)=2i-(i+e^{i\theta})\ (1+i)+(1+i)\ (-1+e^{i\theta})=0$

b) $z'+z''=\frac{-b}{a}$ d'où $z'+(1-i)=i+e^{i\theta}$ alors $z'=-1-i+i+e^{i\theta}=-1+e^{i\theta}$

d'où $z'=-1+e^{i\theta}$ et $z''=1+i$

2) a) AM= $|z_M-z_A|=|-1+e^{i\theta}+1|=|e^{i\theta}|=1$

Donc M varie sur le cercle de centre A et de rayon 1

b) (BM) est tangente an cercle ( C) $\Leftrightarrow$ $\overline{AM}et\overline{BM}$ sont

orthogonaux. $\Leftrightarrow\left(\vec{AM},\vec{BM}\right)=\frac{\pi}{2}(\pi)$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}\right)=\frac{\pi}{2}(\pi) \quad \Leftrightarrow \frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}\in iR \quad \Leftrightarrow R_e\left(\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}\right)=0$$

Or $\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}=\frac{-1+e^{i\theta}-i\sqrt{3}}{-1+e^{i\theta}+1} = \frac{-1-i\sqrt{3}+e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\theta}+1 = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\theta\right)}+1$

Re $\left(\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}\right)=2\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\theta\right)+1 = 2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}-\theta\right)+1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+1$

Re $\left(\frac{Z_M-Z_B}{Z_M-Z_A}\right)=\Leftrightarrow Cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow Cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)=Cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}+\theta=\frac{2\pi}{3}+2\kappa\pi \quad ou \quad \frac{2\pi}{3}+\theta=-\frac{2\pi}{3}+2\kappa\pi \Leftrightarrow \theta=2k\pi \quad \text{ou}$$

$$\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

Comme $\theta \in [0,2\pi[$ alors : (BM) est tangente an cercle ( C) $\Leftrightarrow$ $\theta \in \left\{o, \frac{2\pi}{3}\right\}$

**2eme méthode :**

la droite (BM) est tangente an cercle ( C) $\Leftrightarrow$ $\overline{AM} et \overline{BM}$ sont orthogonaux. $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}.$

$\overrightarrow{BM}$ =0

$\Leftrightarrow$ 1-cos$\theta$-$\sqrt{3}$sin$\theta$ =0 $\Leftrightarrow$ cos$\theta$+$\sqrt{3}$sin$\theta$=1 $\Leftrightarrow$ cos($\theta$-$\frac{\pi}{3}$) =$\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\theta \in \left\{o, \frac{2\pi}{3}\right\}$

**EXERCICE 2 ( 6 points )**

Dans le plan orienté, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre [AB]. On désigne par F le point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et par $\Delta$ la perpendiculaire à (AB) en A.

La tangente à $\mathscr{C}$ en F coupe la droite $\Delta$ en un point A'. Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer F et de directrice ( AB ).

1) a – Montrer que le point A' appartient à la parabole $\mathscr{P}$.
   b – Préciser la tangente à $\mathscr{P}$ en A'.

2) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point B et soit B' le point d'intersection de cette tangente avec la droite ( A'F).
   Montrer que le triangle A'OB' est rectangle.

3) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par F et parallèle à (AB) et K le projeté orthogonal de F sur (AB).
   a – Soit M un point de $\mathscr{D}$ distinct de F et soit H son projeté orthogonal sur la droite (AB).
   Montrer que si M appartient à la parabole $\mathscr{P}$, alors FMHK est un carré.
   b – En déduire une construction des deux points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec la parabole $\mathscr{P}$.

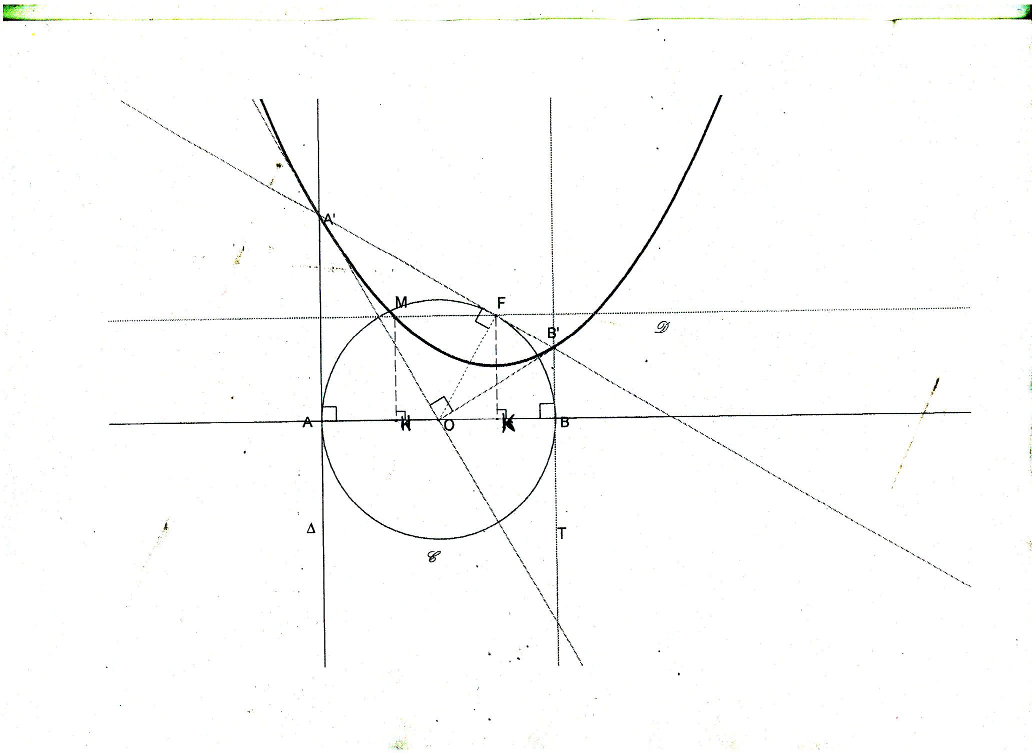
de quoi s'agit-il ?

Paraboles .

Tangentes à une parabole.

Construction des points d'intersection d'une parabole et d'une droite.

<u>Solutions de l’exercice 2</u> :




1) a) On a : d$\left(A',(AB)\right) = A'A \quad = A'F$ (Les triangles A’FO et A’AO sont isométriques).

Donc $A' \in \rho$

b) La tangente à P en A’ est la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{A'F},\overrightarrow{A'A}\right)$ c’est (A’O).

2)

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OA'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OF}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OA'}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}}\right)+\frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OA}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

3) a) – si M $\in$ P alors MF = d(M,(AB)) = MH

Le quadrilatère FMHK étant visiblement un rectangle et a deux côtés consécutifs isométriques c’est un carré.

b) Si $M_1$ et $M_2$ sont les points d’intersection de D avec P alors F $M_1$ $H_1$ K est un carré , F $M_2$ $H_2$ K est un carré et $M_1H_1 = M_2H_2 = FK$

Alors ces carrées sont isométriques et $M_1F = M_2F$ donc $M_1$ et $M_2$ sont les points d’intersection du cercle de centre F et de rayon FK avec D d’où leur construction.

<u>Solutions du problème</u> :

## Partie A :

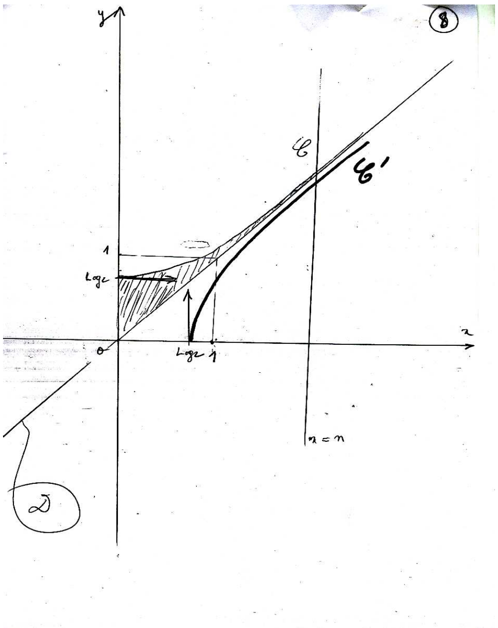
1) a) $f'(x)=1+\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{1+e^{-2x}-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

| x | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | 0 | + | |
| f(x) | Log2 | ↗ | $+\infty$ |

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$ donc D est asymptote à $C$ an voisinage de $+\infty$

c) $f(x)-x=Log\left(1+e^{-2x}\right)\phi\ 0$ donc C est au dessus de D.

d)




2) a) f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f\ \pi\ [0,+\infty[\ \phi=[Log2,+\infty[$

b) (C') est le symétrique de (C) par rapport à D.

3) a) $1-t-\frac{1}{1+t}=\frac{1-t^2-1}{1+t}=\frac{-t^2}{1+t}$ donc $1-t\leq\frac{1}{1+t}, \quad \forall t\in[0,+\infty[$

$\frac{1}{1+t}\leq 1 \quad puisque 1+t\geq 1 \quad \forall t\in[0,+\infty[$ donc $1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1$

b) d'après ce qui précède $1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1$

donc $\int_6^x(1-t)dt\leq\int_6^x\frac{1}{1+t}\leq\int_6^x 1.dt$ alors $\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]_0^x\leq[Log(1+t)]_0^x\leq x$

Donc :

$-\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{2}\leq Log(1+x)\leq x$

$c'est\ \ à\ \ dire \quad x-\frac{1}{2}x^2\leq Log(1-x)\leq x$

c) d'après ce qui précède pour tout $x\in[0,+\infty[ \quad x-\frac{1}{2}x^2\leq Log(1+x)\leq x$

Donc pour $t\in[0,+\infty[$ , $e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-4t}\leq Log\left(1+e^{-2t}\right)\leq e^{-2t}$

4) a) $S_n=\int_0^x(f(x)-x)dx \quad =\int_0^x Log(1+e^{-x})dx$

D'après ce qui précédé, $e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-4x}\leq Log\left(1+e^{-2x}\right)\leq e^{-2x}$

Donc :

$$\int_6^x\left(e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-4x}\right)dn\leq\int_0^x Log\left(1+e^{-2x}\right)dn\leq\int_6^x e^{-2x}dn$$

or

$$\int_6^n\left(e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-4x}\right)dx=\int_6^n e^{-2x}dx-\frac{1}{2}\int_6^n e^{-4x}dx \quad =\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_6^n-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_6^n$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}e^{-4n}-\frac{1}{8} \quad =\frac{3}{8}-\frac{1}{2}e^{-2n}+\frac{1}{8}e^{-4n}$$

et $\int_0^n e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^n=-\frac{1}{2}e^{-2n}+\frac{1}{2}$

Alors : $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}e^{-2n}+\frac{1}{8}e^{-4n}\leq S_n\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2n}$

b) $S_{n-1}-S_n=\int_0^{n+1}Log\left(1+e^{-2x}\right)dx-\int_0^n Log\left(1+e^{-2x}\right)dx$

$$\int_n^{n+1} Log\left(1+e^{-2x}\right)dx$$

Or $Log\left(1+e^{-2x}\right)dn \succ 0$ $car$ $1+e^{-2x} \succ 1$ alors $\int_n^{n+1} Log\left(1+e^{-2x}\right)dn \geq 0$

donc $S_{n+1} - S_n \geq 0$ alors $S_n$ est croissante.

d'autre part et d'après ce qui précède a)

$S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$ Donc $S_n \leq \frac{1}{2}$ c.â.d $S_n$ *est majorée par* $\frac{1}{2}$

croissante et majorée $S_n$ est convergente.

Et puisque : $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{8}e^{-4n} \leq S_n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2n}$ Alors, $\frac{3}{8} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-kn} = 0$

## Partie B :

1) $U_0 = \int_0^{Log^2} dx = Log2$

$$U_1 = \int_0^{Log} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^{Log^2} = f(Log2) - f(0) = Log2 + Log(1+e^{-2Log2}) - Log2$$

$$= Log(1+e^{-Log4}) = Log(1+\frac{1}{4}) = Log(\frac{5}{4})$$

2) a) $0 \leq x \leq Log2$ donc $-2Log2 \leq -2x \leq 0$ d'ou $\frac{1}{4} \leq e^{-2x} \leq 1$

Alors $\frac{5}{4} \leq 1+e^{-2x} \leq 2$ et par suite $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{-2x}} \leq \frac{4}{5}$ d'autre part

$0 \leq 1-e^{-2x} \leq \frac{3}{4}$

alors $a \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

b) $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}$ donc $0 \leq \int_6^{Log2} \left[f'(x)\right]^n dx \leq \int_0^{Log2} (\frac{3}{5})^n dx$ d'où

$0 \leq Un \leq (Log2)(\frac{3}{5})^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0.$

3) a) $$1-f''(x)=1-\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)' = \frac{\left(1+e^{-2x}\right)^2-\left[2e^{-2x}\left(1+e^{-2x}\right)+\left(2e^{-2x}\right)\left(1-e^{-2x}\right)\right]}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}$$

$$=\frac{\left((1+e^{-2x}\right)^2\left[-4e^{-2x}\right]}{\left(1+e^{-2x}\right)^2} = \frac{\left(1-e^{-2x}\right)^2}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}$$

b) $Un=\int_0^{Log\,2}(f'(x))^n\,dx$

Or $\left(f'(x)\right)^n=\left(f'(x)\right)^2\left(f'(x)\right)^{n-2} =\left(1-f''(x)\right)\left(f'(x)\right)^{n-2} =\left(f'(x)\right)^{n-2}-f''(x)\left(f'(x)\right)^{n-2}$

Alors, $U_n=U_{n-2}-\left[\frac{1}{n-1}\left(f'(x)\right)^{n-1}\right]_0^{Log\,2} = U_{n-2}-\frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

c) $U_{2n}=U_{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ et $U_{2n+1}=U_{2n-1}-\frac{1}{2n}\left(\frac{3}{5}\right)^{2n}$

par itération (ou par récurrence) on obtient :

$$U_{2n}=U_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1} \quad \text{et} \quad U_{2n-1}=U_1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k}$$

4) $$V_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{k} =\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1} = U_0-U_{2n}+U_1-U_{2n+1}$$

$$=\left(U_0+U_1\right)-\left(U_{2n}+U_{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\left(U_0+U_1\right), car \quad \lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

$$= Log\,2+Log\,\frac{5}{4} = Log\,\frac{5}{2}$$