REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION ❖❖❖ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** ❖❖❖ **SESSION DE JUIN 2006**	**SESSION DE CONTROLE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 (5 points)

On dispose de deux urnes indiscernables U_1 et U_2.

U_1 contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, U_2 contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs.

1) Une première épreuve consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 et un jeton de l'urne U_2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

   A : « Obtenir deux jetons noirs »

   B : « Obtenir deux jetons de même couleur »

   C : « Obtenir un jeton blanc et un seul ».

2) Une deuxième épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à tirer un jeton de cette urne.

   a – Montrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à $\frac{1}{2}$.

   b – Calculer la probabilité de tirer un jeton de l'urne U_1, sachant qu'il est blanc.

3) On répète la deuxième épreuve n fois de suite ($n \geqslant 2$), en remettant chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine.

   Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de fois où on a tiré un jeton blanc.

   a – Donner la loi de probabilité de X.

   b – Calculer son espérance et sa variance.

   c – Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la probabilité de tirer deux fois un jeton blanc est supérieure ou égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

EXERCICE 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1 + x)\, e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) a – Dresser le tableau de variation de f.

   b – Tracer la courbe $\mathscr{C}$ (on étudiera les branches infinies).

2) Soit $v_n = \int_0^n f(x)\, dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

   a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = 2 - (2 + n)e^{-n}$

   b – Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_k = \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

4) a – Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $u_k = (e-1)\, k\, e^{-k} + (e-2)e^{-k}$

b – En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n = (e-1)\sum_{k=1}^{n} k\, e^{-k} + \frac{e-2}{e-1}\,(1-e^{-n}).$$

5) Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\, e^{-k}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{e}{(e-1)^2}$.

PROBLEME (10 points)

Soit AFED un carré de côté 4 cm tel que $(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

A – 1) a – Soit r la rotation définie par r(F) = E et r(E) = D. Préciser l'angle et le centre de r.

b – Soit $f = r \circ S_{(OO_1)}$; où $S_{(OO_1)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (OO_1).

Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

2) Soit $r' = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ et r^{-1} désigne la rotation réciproque de r.

a – Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle .

b – Déterminer r' (O). En déduire que F est le centre de r' .

3) On désigne par g l'antidéplacement défini par g(D) = F et g(O) = O_1.

a – Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b – Soit M un point du plan.

Montrer que [g(M) = r' (M)] si et seulement si [f(M) = M].

c – En déduire l'ensemble des points M tels que g(M) = r' (M).

B – Soit s la similitude directe telle que s(A) = F et s(B) = E

1) a – Déterminer l'angle et le rapport de s.

b – Montrer que $s = r \circ h_{(A,\frac{1}{2})}$ où r est la rotation définie dans A-1)a et $h_{(A,\frac{1}{2})}$ est l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

2) Soit Ω le centre de s.

a – Montrer que Ω appartient aux deux cercles de diamètres respectifs [AF] et [BE]. Construire Ω .

b – Montrer que s(E) = O. En déduire que Ω , O et B sont alignés.

3) On pose $B_o = B$ et pour tout entier naturel **n** : $B_{n+1} = s(B_n)$.

a – Préciser B_1 et B_2.

b – Montrer que pour tout entier naturel non nul, le triangle $B_{n-1}\,B_n\,B_{n+1}$ est rectangle et les points B_{n-1}, Ω et B_{n+1} sont alignés.

c – Donner un procédé de construction de B_{n+1} à partir de B_{n-1} et B_n.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = B_n\,B_{n+1} = \left\|\overrightarrow{B_n\,B_{n+1}}\right\|$

a – Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le 1[er] terme et la raison.

b – Soit $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$. Calculer σ_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n$.

C – On désigne par : I le milieu de [AF], J le milieu de [OI] et L le symétrique de J par rapport à I

Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse de sommets A, F, J et L.

1) Construire les foyers G_1 et G_2 de $\mathscr{E}$ (G_1 désigne le foyer qui appartient au segment [IF]).

2) Soit $G_1^{'} = s(G_1)$ où s est la similitude directe de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$

a – Montrer que la droite $(\Omega G_1^{'})$ est tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$.

b – Construire le point de contact M de $\mathscr{E}$ et de $(\Omega G_1^{'})$.