REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2005**	**SESSION PRINCIPALE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 heures COEF. : 4**

EXERCICE 1 (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que

$$(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi],\ AB = 3 \quad \text{et} \quad BC = 4.$$

1) Soit f la similitude directe telle que f(A) = B et f(B) = C.
   a – Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b – Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC).
   Montrer que H est le centre de f.

2) Soit D = f(C).
   a – Montrer que D appartient à la droite (BH).
   b – Construire le point D.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C. On désigne par Ω le centre de g.
   a – Montrer que $fog^{-1} = S_{(BC)}$.
   b – Soit E = g(C). Déterminer $S_{(BC)}$ (E).
   Construire alors le point E.
   c – Préciser la nature de gog. Montrer que Ω appartient à la droite (AC) ainsi qu'à la droite (BE).
   d – Construire le point Ω et l'axe Δ de la similitude g.

EXERCICE 2 (4 points)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne le point A d'affixe 1.

Soit l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

1) Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

2) Soit le point M_o d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$.
   a – Montrer que $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$.
   c – En déduire l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les points A, M_o et M_n sont alignés.

PROBLEME (10 points)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A – 1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a – Déterminer les branches infinies de $\mathscr{C}$.
b – Tracer $(\mathscr{C})$.

3) a – Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
b – Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f.
c – Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x > 0$.

4) a – Vérifier que pour tout réel x on a $f(x) = e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

b – Soit λ un réel strictement négatif.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}'$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives : $y = \lambda$ et $y = 0$.

B – Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif x , on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$.

1) a – Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = \text{Log } 2$.

b – Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_2(x)$.

2) a – Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n}(1 - e^{nx})$.

b – Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite du problème on pose $R_n = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_n(x)$.

3) a – Vérifier que pour tout réel $t \leqslant 0$, $2e^t \leqslant 1 + e^t \leqslant 2$.
b – Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout réel $x \leqslant 0$, on a :

$$\frac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{1}{2(n-1)}(1 - e^{(n-1)x}) .$$

c – En déduire un encadrement de R_n pour $n \geqslant 2$.

4) Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $G_n(x) = (-1)^n \displaystyle\int_x^0 e^{nt}dt$.

a – Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.

b – Montrer que $G_1(x) + G_2(x) + \ldots\ldots + G_n(x) = -F_1(x) + (-1)^n F_{n+1}(x)$.

5) On pose, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a – Montrer que $U_n = \text{Log } 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$.

b – Montrer que la suite (U_n) converge et trouver sa limite.