Correction

Exercice 1

I)De quoi s'agit-il ?

Similitudes directes –Similitudes indirectes-Composée de deux similitudes -Construction du centre et de l'axe d'une similitude indirecte .

II –Solutions et commentaires

1) f la similitude directe telle que f(A) = B et f(B) = C.

a) Soit α l'angle de f et k son rapport.

On a f(A) = B et f(B) = C, donc $\alpha \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})\,[2\pi]$ et k = $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})\,[2\pi]\\ &\equiv -(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB})\,[2\pi]\\ &\equiv \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\,[2\pi]\\ &\equiv \pi - \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi].\end{aligned}$$

b) Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). On note ω le centre de f.

f(A) = B et f(B) = C, d'où $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega C}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

alors $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega C}) \equiv \pi\,[2\pi]$

par conséquent le point ω appartient à la droite (AC).

$(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega C}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \Rightarrow (\omega B) \perp (\omega C)$

$\Rightarrow (\omega B) \perp (AC)$, puisque ω appartient à la droite (AC).

On a $(\omega B) \perp (AC)$ et ω appartient à la droite (AC), d'où ω est le projeté orthogonal de B sur (AC).

Ainsi ω = H. Le centre de la similitude f est donc le point H.

Une autre méthode :

On a : $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega C}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, d'où le centre de f appartient au demi-cercle de diamètre [BC] contenant H et au demi-cercle de diamètre [AB] contenant H, donc H est le centre de f puisque f(B) $\neq$B.

2)a) D = f(C), d'où $(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HD}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Or $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HD}) \equiv \pi\,[2\pi]$

Ainsi D appartient à la droite (HB).

b) On a D$\in$ (HB).

D'autre part f(B) = C et f(C) = D implique $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

D'où $(BC) \perp (CD)$

Par conséquent D appartient à la perpendiculaire à (BC) en C.

Ainsi D est l'intersection de (HB) et la perpendiculaire à (BC) en C. D'où la construction de D.

3) Soit g la similitude indirecte telle que g(A) = B et g(B) = C. On désigne Ω par le centre de g.

a) $fog^{-1}(B) = f[g^{-1}(B)] = f(A) = B = S_{(BC)}(B)$.

$fog^{-1}(C) = f[g^{-1}(C)] = f(B) = C = S_{(BC)}(C)$.

fog^{-1} et $S_{(BC)}$ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts, donc elles sont égales $fog^{-1} = S_{(BC)}$.

b) $S_{(BC)}(E) = S_{(BC)}(g(C)) = S_{(BC)}og(C) = f(C) = D$.

$S_{(BC)}(E) = D$ signifie $S_{(BC)}(D) = E$. D'où la construction de E.

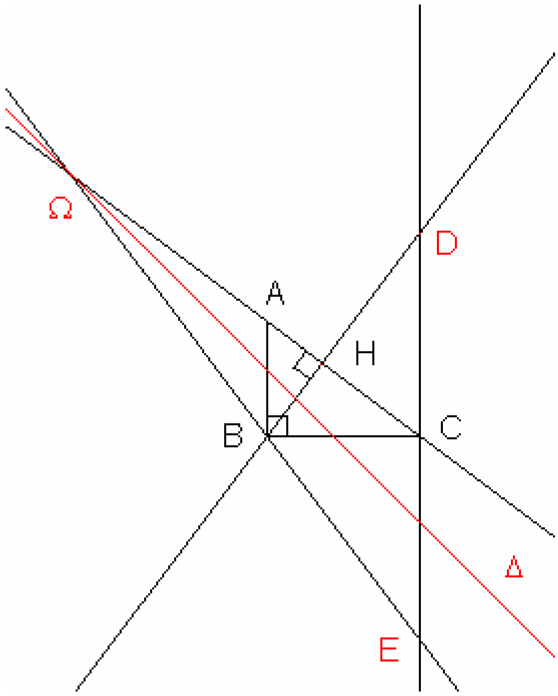
c) gog est une homothétie de centre Ω et de rapport k^2, où k est le rapport de g.

$gog(A) = g(B) = C$, d'où $\Omega \in (AC)$.

$gog(B) = g(C) = E$, d'où $\Omega \in (BE)$.

Ainsi Ω est l'intersection des droites (AC) et (BE).

d) On a g(A) = B. Δ est donc la droite qui porte la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.



Problème

I)-De quoi s'agit-il ?

Fonction exponentielle –fonction logarithme-fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone-Calcul d'aire -Fonction définie à l'aide d'une intégrale-Suites.

II –Solutions et commentaires

A) 1) $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(e^x+2)}{(1+e^x)^2} > 0$, pour tout réel x.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{e^x}+1} = +\infty. \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{1+e^x} = 0.$$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	+
f	0 $\nearrow$ $+\infty$

2)a) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x}+1} = 1.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x+1} - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - x - xe^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x}.\frac{x}{e^x} - \frac{x}{e^x})}{\frac{1}{e^x}+1} = +\infty.$ D'où la courbe C de f admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation y = x.

On a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$ D'où la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à C au voisinage de - ∞.

b) Voir courbe.

3)a) f est continue et strictement croissante sur IR, d'où elle réalise une bijection de IR sur f(IR) = IR^*_+.

b) Voir courbe.

c) Soit x ∈ IR et y ∈ IR^*_+.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

$\Leftrightarrow e^{2x} - y\,e^x - y = 0$ (E)

On pose $X = e^x$.

(E) $\Leftrightarrow X^2 - yX - y = 0,\ X > 0$

$\Delta = y^2 + 4y > 0$, pour tout y > 0.

$X_1 = \frac{y - \sqrt{y^2+4y}}{2}$ et $X_2 = \frac{y + \sqrt{y^2+4y}}{2}$. Or $X_1 < 0$, d'où $X = \frac{y + \sqrt{y^2+4y}}{2}$.

$e^x = \frac{y + \sqrt{y^2+4y}}{2} \Leftrightarrow x = \mathrm{Log}(\frac{y + \sqrt{y^2+4y}}{2})$.

Ainsi $f^{-1}(x) = \mathrm{Log}(\frac{x + \sqrt{x^2+4x}}{2})$, pour tout x > 0.

4)a) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.

b) Soit λ > 0. Par symétrie, A(λ) est aussi l'aire limité par la courbe C de f, l'axe (Ox), et les droites d'équations x = λ et x = 0.

$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} f(x)dx$

$= \int_{\lambda}^{0} (e^x - \frac{e^x}{1+e^x})\,dx$

$= [e^x - \mathrm{Log}(1+e^x)]_{\lambda}^{0}$

$= (1 - \mathrm{Log}2) - (e^{\lambda} - \mathrm{Log}(1+e^{\lambda}))$ unité d'aire.

B) 1)a) $F_1(x) = \int_x^0 (\frac{e^t}{1+e^t})\,dt = [\mathrm{Log}(1+e^t)]_x^0 = \mathrm{Log}\,2 - \mathrm{Log}(1+e^x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{Log}2 - \mathrm{Log}(1+e^x) = \mathrm{Log}2.$$

b) $F_2(x) = \int_x^0 (\frac{e^{2t}}{1+e^t})\,dt = \int_x^0 f(t)dt = A(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} F_2(x) = \lim_{x\to-\infty} A(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 - \mathrm{Log}2) - (e^x - \mathrm{Log}(1+e^x)) = 1 - \mathrm{Log}2.$$

2)a) $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \int_x^0 \left(\frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\right) dt + \int_x^0 \left(\frac{e^{nt}}{1+e^t}\right) dt$

$$= \int_x^0 \left(\frac{e^{nt}(1+e^t)}{1+e^t}\right) dt$$

$$= \int_x^0 e^{nt}\, dt$$

$$= \frac{1}{n}[e^{nt}]_x^0$$

$$= \frac{1}{n}(1-e^{nx})$$

b) ♦ $\lim_{x\to-\infty} F_1(x) = \mathrm{Log}2.$

$\lim_{x\to-\infty} F_2(x) = 1 - \mathrm{Log}2.$

♦ Supposons que $F_n(x)$ admet une limite finie l lorsque x tend vers $-\infty$.

♦ $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n}(1-e^{nx}) \Rightarrow F_{n+1}(x) = -F_n(x) + \frac{1}{n}(1-e^{nx})$.

On a $\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = l.$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{n}(1-e^{nx}) = \frac{1}{n}$, d'où $\lim_{x\to-\infty} F_{n+1}(x) = -l + \frac{1}{n}$ limite finie.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

On pose $R_n = \lim_{x\to-\infty} F_n(x)$.

3)a) $t \le 0 \Rightarrow 0 \le e^t \le 1$

$\Rightarrow 1 + e^t \le 2$ et $2e^t \le 1 + e^t$

$\Rightarrow 2e^t \le 1 + e^t \le 2.$

b) $n \ge 2$ et $x \le 0$.

$$2e^t \le 1 + e^t \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+e^t} \le \frac{1}{2e^t}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{nt}}{2} \le \frac{e^{nt}}{1+e^t} \le \frac{e^{nt}}{2e^t}$$

$$(x<0) \Rightarrow \int_x^0 \frac{e^{nt}}{2} dt \le \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^t} dt \le \int_x^0 \frac{e^{nt}}{2e^t} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n}(1-e^{nx}) \le F_n(x) \le \frac{1}{2(n-1)}(1-e^{(n-1)x}).$$

c) On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2(n-1)}(1-e^{(n-1)x}) = \frac{1}{2(n-1)}$ et $\lim_{x\to-\infty} F_n(x) = R_n$.

D'où $\frac{1}{2n} \le R_n \le \frac{1}{2(n-1)}$.

4)a) $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt} dt = (-1)^n \left[\frac{1}{n} e^{nt}\right]_x^0 = \frac{(-1)^n}{n}(1-e^{nx})$.

$$\lim_{x\to-\infty} G_n(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1)^n}{n}(1-e^{nx}) = \frac{(-1)^n}{n}.$$

b) $G_1(x) + G_2(x) + ... + G_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \int_x^0 e^{kt} dt$

$$= \int_x^0 \left(\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k e^{kt}\right) dt$$

$$= \int_x^0 -e^t \, \frac{1-(-1)^n e^{nt}}{1+e^t} \, dt$$

$$= - \int_x^0 \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right) dt \; + (-1)^n \int_x^0 \left(\frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\right) dt$$

$$= -F_1(x) + (-1)^n \; F_{n+1}(x).$$

5)a) $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \lim_{x \to -\infty} (-G_k(x))$$

$$= - \lim_{x \to -\infty} \sum_{k=1}^{k=n} G_k(x) \, , \; \left(\lim_{x \to -\infty} G_n(x) \text{ finie} \right)$$

$$= - \lim_{x \to -\infty} \left(-F_1(x) + (-1)^n \; F_{n+1}(x)\right)$$

$$= \text{Log } 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}.$$

b) On a d'après 3)c) $\dfrac{1}{2\,n} \leq R_n \leq \dfrac{1}{2\,(n-1)}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2\,n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2\,(n-1)} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$.

$U_n = \text{Log } 2 + (-1)^{n+1} R_{n+1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left|(-1)^n R_n\right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| R_n \right| = 0$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n R_n = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \text{Log2}$.