REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

**EXAMEN DU BACCALAUREAT**

**SESSION DE JUIN 2005**

**SESSION DE CONTROLE**

**SECTION : MATHEMATIQUES**

**EPREUVE : MATHEMATIQUES**

**DUREE : 4 heures COEF. : 4**

## EXERCICE 1 : ( 5 points )

Une urne contient trois boules rouges numérotées 1,2,2 et trois boules blanches numérotées 1,1,2.

Une épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

1) a – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « avoir trois boules de même couleur »
B : « la somme des nombres inscrits sur les boules tirées est égale à cinq »
b – Soit C l'événement : « avoir au moins une boule rouge qui porte le numéro 2 ».
Montrer que $p( C ) = \frac{4}{5}$

2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges portant le numéro 2 obtenues.
a – Déterminer la loi de probabilité de X.
b – Calculer E(X).

3) On répète l'épreuve précédente n fois ( $n \geqslant 1$ ) de suite, en remettant après chaque épreuve les boules tirées dans l'urne.
a – Calculer la probabilité $p_n$, pour que l'événement C soit réalisé au moins une fois.
b – Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0{,}99$.

## EXERCICE 2 : ( 5 points )

1) Soit f la fonction définie sur $[ 0, +\infty [$ par $f(x) = x^3 e^{1-x^2}$
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $( O, \vec{i}, \vec{j} )$.
a – Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
b – Dresser le tableau de variation de f.
c – Construire la courbe $\mathscr{C}$.

2) Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$U_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx$$

a – Calculer $U_1$.
b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.
En déduire que $( U_n )$ est convergente et trouver sa limite.

4) a – Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right) U_n - \frac{1}{2}$.
b – En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1.

**PROBLEME : ( 10 points )**

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet principal A.

On pose $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2\alpha \; [\; 2\pi \;]$ où $\alpha$ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

On désigne par O le milieu de [ BC ] et par D le symétrique de A par rapport à O.
Soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC).

**A –** 1) Soit f la similitude directe qui transforme O en I et D en J.

a – Montrer que f a pour angle $\alpha$ et pour rapport $\cos\alpha$.

b – Prouver que le centre de f est le point A.

2) On désigne par E le symétrique du point O par rapport au point I.

a – Montrer que f(B) = O et que f(C) = E .

b – En déduire que $\frac{OE}{BC} = \cos\alpha$ .

3) Soit $\sigma$ la similitude indirecte telle que :

$\sigma$ (B) = O et $\sigma$ (C) = E.

a – Déterminer le rapport de $\sigma$.

b – Montrer que $\sigma$(O) = I.

4) a – On désigne par $S_{(OE)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OE).

Montrer que $\sigma = S_{(OE)} \circ f$.

b – Montrer que $\sigma$(D) = A et $\sigma$ (A) = J.

5) Soit $\Omega$ le centre de $\sigma$ .

a – Montrer que $(\sigma\circ\sigma)$ (D) = J et en déduire que $\Omega$ appartient à la droite (DJ) .

b – Montrer que $\Omega$ appartient à la droite (BI).

c – Construire le point $\Omega$ .

d – Montrer que $\overrightarrow{\Omega I} = (\cos^2\alpha)\,\overrightarrow{\Omega B}$ . (1)

**B –** Dans cette partie on suppose que OC = 1 et on munit le plan du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$ .

1) a – Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OI}}) \equiv \alpha \; [2\pi]$ et que OI = $\cos\alpha$.

b – En déduire que $\overrightarrow{OI} = (\cos^2\alpha)\,\vec{u} + (\cos\alpha\ \sin\alpha)\,\vec{v}$ .

c – En utilisant la relation (1), montrer que les coordonnées x et y du point $\Omega$ sont telles que $x = 2\,\text{cotg}^2\alpha$ et $y = \text{cotg}\,\alpha$.

2) Dans cette question on suppose que les points B et C sont fixes.

Montrer que lorsque $\alpha$ varie dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ le point $\Omega$ varie sur une parabole $\mathscr{P}$ dont on précisera le foyer F et la directrice $\Delta$.

3) Le cercle de diamètre [ BF ] coupe la droite (OA) en M et N.

a – Montrer que les droites ( BM ) et ( BN ) sont les tangentes à $\mathscr{P}$ issues de B.

b – Construire les points de contact de ces deux tangentes avec $\mathscr{P}$.