Correction :

Problème

I)-De quoi s'agit-il ?

Similitudes directes - Similitudes indirectes - composée de similitudes-construction du centre d'une similitude-Paraboles –tangentes à une paraboles –Construction du point de contact d'une tangente à une parabole.

II)-Solutions et commentaires.

A)1)a) On a f(O) = I et f(D) = J. $(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{IJ}}) \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi]$

$\equiv \alpha\ [2\pi]$

D'où l'angle de la similitude f est α.

Soit k le rapport de f. On a k = $\dfrac{IJ}{OD} = \dfrac{AI}{AO} = \cos\alpha$.

b) On a : $\dfrac{AI}{AO} = \cos\alpha = k$ et $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI}}) \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi] \equiv \alpha\ [2\pi]$, d'où A est le centre de f.

2)a) On a $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ et $\dfrac{AO}{AB} = \cos\alpha$, d'où f(B) = O.

On a $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ et $\dfrac{AE}{AC} = \cos\alpha$, d'où f(C) = E.

b) On a f(B) = O et f(C) = E, d'où $\dfrac{OE}{BC} = k = \cos\alpha$.

3) σ la similitude indirecte telle que σ(B) = O et σ(C) = E.

a) Soit k' le rapport de σ.

On a σ(B) = O et σ(C) = E, d'où k' = $\dfrac{OE}{BC} = k = \cos\alpha$.

b) On a O est le milieu du segment [BC], d'où σ(O) est le milieu du segment [σ(B) σ(C)], c'est-à-dire milieu de [OE]. D'où σ(O) = I.

4)a) $S_{(OE)}$of(B) = $S_{(OE)}$(O) = O = σ(B)

$S_{(OE)}$of(C) = $S_{(OE)}$(E) = E = σ(C).

$S_{(OE)}$ est une similitude indirecte et f est une similitude directe, d'où $S_{(OE)}$of est une similitude indirecte.

$S_{(OE)}$of et σ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts, donc elles sont égales. Ainsi $S_{(OE)}$of = σ.

b) σ(D) = $S_{(OE)}$of (D) = $S_{(OE)}$(J) = A, en effet on a O est le milieu de [AD] et (OI) parallèle à (DJ), donc I la milieu de [AJ].

σ(A) = $S_{(OE)}$of (A) = $S_{(OE)}$(A) = J.

5)a) Soit Ω le centre de σ.

σoσ(D) = σ(A) = J

σoσ est une homothétie de centre Ω. D'où Ω appartient à la droite (DJ).

b) σoσ(B) = σ(O) = I, d'où Ω appartient à la droite (BI).

c) Ω est donc le point d'intersection des droites (BI) et (DJ).

d) σoσ est une homothétie de centre Ω et de rapport $\cos^2\alpha$.

σoσ(B) = I $\Rightarrow$ $\overrightarrow{\Omega I} = \cos^2\alpha\ \overrightarrow{\Omega B}$.

B)1)a) $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OI}}) \equiv \dfrac{\pi}{2} - (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CO})\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2} - (\dfrac{\pi}{2} - \alpha)\ [2\pi] \equiv \alpha\ [2\pi]$.

$\dfrac{OI}{OC} = \cos\alpha$ $\Rightarrow$ OI = cosα, (on a OC = 1).

b) On a $\overrightarrow{OI} = OI\ \cos\alpha\ \vec{u}\ + OI\ \sin\alpha\ \vec{v} = \cos^2\alpha\ \vec{u} + \sin\alpha\cos\alpha\ \vec{v}$.

c) On a I($\cos^2\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha$) et B(-1 , 0).

$$\overrightarrow{\Omega I} = \cos^2\alpha\ \overrightarrow{\Omega B} \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos^2\alpha - x = \cos^2\alpha(-1-x) \\ \sin\alpha\ \cos\alpha = \cos^2\alpha(-y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\,\text{cotg}^2\alpha \\ y = \text{cotg}^2\alpha \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x = 2\,\text{cotg}^2\alpha \\ y = \text{cotg}^2\alpha \end{cases} \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{2}\ x$.

D'où Ω varie sur une parabole de foyer F($\frac{1}{8}$, 0) et de directrice la droite Δ d'équation x = $-\frac{1}{8}$.

(Le point O est le sommet de cette parabole).

3)a) On considère l'homothétie h de centre F et de rapport 2.

On pose H = h(M) et H' = h(N).

H et H' sont les symétriques de F respectivement par rapport à (BM) et (BN).

On a h((MN)) = Δ.

Ainsi les symétriques de F respectivement par rapport à (BM) et (BN) sont sur la directrice Δ de la parabole. D'où les droites (BM) et (BN) sont les tangentes à la parabole issues du point B.

b) La perpendiculaire à Δ en H rencontre la droite (BM) en M_1, le point de contact de la tangente (BM) à la parabole.

De même, la perpendiculaire à Δ en H' rencontre la droite (BN) en N_1, le point de contact de la tangente (BN) à la parabole.