REPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTERE DE L'EDUCATION** **ET DE LA FORMATION** ❖❖❖ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2004**	**SESSION PRINCIPALE** **SECTION : MATHEMATIQUES** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 4 h COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2OC et $\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

(Pour la figure, on prendra OA = 4 (en cm)).

La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J le symétrique du point O par rapport au point I et J' le symétrique du point O par rapport à I'.

1) a – Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.
   b – En déduire que les points B, J et J' sont alignés.

2) Soit S la similitude directe telle que S(J) = O et S(O) = J'.
   a – Déterminer une mesure de l'angle de S.
   b – Montrer que le point B est le centre de la similitude S .
   c – Donner le rapport de la similitude S.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que σ(J) = O et σ(O) = J'.
   a – Donner le rapport de σ .
   b – En déduire que la similitude σ admet un unique point invariant que l'on notera Ω.
   c – Déterminer $\sigma \circ \sigma$ (J) et en déduire que le point Ω appartient à la droite (JJ').
   d – Construire le point Ω ainsi que l'axe D de la similitude σ.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia .
   On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels .
   a – Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.
   b – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si | a | = 1.

3) On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
   a – Vérifier que pour tout réel x , on a

$$1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

$$1 - e^{ix} = -2\, i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

   b – En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes 1 + ia et 1 – ia.
   c – Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

PROBLEME (10 points)

A – On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x) = \sqrt{1+x}\ e^{-x}$ et on désigne par $\mathscr{C}_1$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Etudier la dérivabilité de f_1 à droite de -1.
   b – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   c – Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.
   d – Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2}, +\infty[$

   et que $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

6) a – Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^x$.

   b – En déduire que pour tout réel $x \geq -1$, on a $f_1(x) \leq e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)\,dx$.

   a – Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.

   b – Montrer que pour tout $\lambda \geq 1$, on a $0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.

B – Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{1+x}\ e^{-\frac{x}{n}}$.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) a – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un point M_n.
   b – On désigne par α_n l'abscisse de M_n. Etudier la nature de la suite (α_n).

3) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

4) On pose $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par

   $A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx$.

   a – Calculer I.

   b – Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $1 - e^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{1}{n}} - 1$.

   c – En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|e^{-\frac{x}{n}} - 1| \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$.

   d – Montrer que $|A_n - I| \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}\ (e^{\frac{1}{n}} - 1)$.

   e – En déduire que la suite (A_n) est convergente et donner sa limite.