REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2004

SESSION DE CONTROLE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 h COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \text{Log}(x^2 - 2x + 2)$.
Soit ($\mathscr{C}$)sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Dresser le tableau de variation de la fonction f.
b – Montrer que la droite D d'équation x = 1 est un axe de symétrie de la courbe ($\mathscr{C}$).
c – Préciser la branche infinie de ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.
d – Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

2) Soit F la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{1+\operatorname{tg}x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$

a – Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que $F'(x) = 1$.

b – En déduire que $F(x) = x$ et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}$.

3) a – A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 2\,\text{Log}\,2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}\,dx.$$

b – Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

c – Calculer, alors, l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites D : x = 1 et D' : x = 2.

EXERCICE 2 (4 points)

Une urne contient deux boules blanches numérotées 1 et 2 et trois boules rouges numérotées 1, 2, 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément deux boules de l'urne.
a – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A « Tirer deux boules de couleurs différentes ».
B « Tirer deux boules de même numéro ».

b – Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, calculer la probabilité pour qu'elles portent le même numéro.

2) Dans cette question, l'épreuve consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. Soit X l'aléa numérique qui est égal au nombre de boules rouges tirées au cours de cette épreuve. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X).

PROBLEME (10 points)

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

(pour la figure on prendra AB = BC = 6 (en cm)).
On désigne par I, J et O les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC].
Soient I' le symétrique de O par rapport à (AB) et J' le symétrique de O par rapport à (BC).
Les demi-droites [OI) et [OJ) coupent le cercle de diamètre [AC] respectivement en A' et B'.

I – 1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\left(\frac{-\pi}{4}\right)$. Déterminer r(A) et r(B).

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a – Montrer que : $\frac{OI}{OA'} = \frac{OJ}{OB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b – En déduire h(A') et h(B').

3) On désigne par S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.
a – Montrer que : S = hor .
b – En déduire les éléments caractéristiques de S.

4) Soit P un point du plan distinct de O et soit P' = r(P). On désigne par Q le projeté orthogonal de P sur [OP'].
a – Montrer que le triangle OPQ est rectangle et isocèle.
b – Montrer alors que S(P) = Q.
c – Montrer que OBI'A est un carré. En déduire S(I').
d – Déterminer S(J').

II - Soit M un point de la droite (AB) tel que M ≠ B. (Pour la figure on prendra : M ∈ [BA) et BM = 8 (en cm)).
Soit Δ la médiatrice de [OM].

1) On pose S(M) = N. Montrer que { N } = Δ ∩ (IJ) .

2) Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer O et de directrice la droite (I'J').
a – Vérifier que A et C sont deux points de $\mathscr{P}$ et préciser les tangentes à $\mathscr{P}$ en ces deux points.
b – Montrer que lorsque le point M varie sur (AB) – {B}, la droite (MN) reste tangente à la parabole $\mathscr{P}$.
c – Construire le point de contact de (MN) et de ($\mathscr{P}$).