REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION ❖❖❖ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** ❖❖❖ SESSION DE JUIN 2006	**SESSION DE CONTROLE** **SECTION : ECONOMIE ET GESTION** **EPREUVE : MATHEMATIQUES** **DUREE : 3 heures COEFFICIENT : 2**

Exercice 1 : (6 points)

1) a) Vérifier que $\left(2 - i\sqrt{3}\right)^2 = 1 - 4\, i\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4\, i\sqrt{3} = 0$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E) : $z^3 - 3z^2 + 2(1 + 2\, i\sqrt{3})\, z - 4\, i\sqrt{3} = 0$.

a) Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E).

b) Vérifier que pour tout nombre complexe z on a :

$$z^3 - 3z^2 + 2(1 + 2\, i\sqrt{3})\, z - 4\, i\sqrt{3} = (z - 1)(z^2 - 2z + 4\, i\sqrt{3}).$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

d) Placer dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C images des solutions de l'équation (E).

Exercice 2 : (6 points)

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$U_n = \int_0^1 x^n \, dx \qquad \text{et} \qquad V_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} \, dx$$

1) a) Montrer que $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b) Calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

2) a) Vérifier que pour tout réel x différent de -1 on a : $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

b) En déduire que $V_1 = 1 - \text{Log}\, 2$.

c) Montrer que $V_{n+1} + V_n = U_n$.

d) En déduire les valeurs de V_2 et V_3.

Problème : (8 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} + x$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

A – 1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \dfrac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} + 1$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la courbe ($\mathscr{C}$) est en dessous de Δ.

c) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage de $-\infty$.

3) a) Montrer que le point $A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe ($\mathscr{C}$).

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe ($\mathscr{C}$) au point A.

4) Tracer ($\mathscr{C}$) et T.

B – Soit α un réel strictement positif.

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = \mathrm{Log}\left(\frac{1 + e^{\alpha}}{2}\right)$.

2) Calculer la mesure de l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ, et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \alpha$.

3) Montrer que $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha) = \mathrm{Log}\ 2$.