REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2005

SESSION PRINCIPALE

SECTION : ECONOMIE ET GESTION
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 3 h COEFFICIENT : 2

EXERCICE N° 1 (6 points)

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) : $z^3 - iz^2 - 2z - 4i = 0$
Vérifier que pour tout nombre complexe z on a :

$$z^3 - iz^2 - 2z - 4i = (z + i)(z^2 - 2iz - 4).$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
3) On donne dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.
a – Ecrire sous forme exponentielle z_A, z_B et z_C.
b – Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C.
c – Montrer que ABC est un triangle isocèle.

EXERCICE N°2 (6 points)

Soient a, b et c trois nombres réels et
soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = a\,U_n + bn + c \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

I – On donne $U_1 = 3$; $U_2 = 7$ et $U_3 = 17$.

1) Montrer que a, b et c vérifient le système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} 2a + c = 3 \\ 3a + b + c = 7 \\ 7a + 2b + c = 17. \end{cases}$$

2) Déterminer les valeurs de a, b et c.

II – Dans cette partie on suppose que la suite (U_n) est définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2\,U_n + 2n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a – Calculer U_1 et U_2.
b – Justifier alors que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n + 2n+1$.
a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.
b – Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

PROBLEME (8 points)

I – Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\,\mathrm{Log}\,x$.

1) a – Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

b – Dresser le tableau de variation de g.

2) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $g(x) \geq 1$.

II – On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,\mathrm{Log}\,x + 2}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a – Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b – Dresser le tableau de variation de f.

2) a – Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b – en remarquant que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $f(x) - x = \dfrac{2}{x}(1 + \mathrm{Log}\,x)$.

Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

c – Ecrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

d – Tracer T, Δ et $\mathscr{C}$.

3) a – Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = [\mathrm{Log}\,x]^2$. Calculer $h'(x)$.

b – En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 1$.