REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2005

SESSION DE CONTROLE

SECTION : ECONOMIE ET GESTION
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 3 h COEFFICIENT : 2

EXERCICE N°1 : (6 points)

Une urne contient quatre boules rouges numérotées 1, 1, 2, 2 et quatre boules blanches numérotées 1, 2, 2, 2.

Une épreuve consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

1) a – Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « Obtenir deux boules de même couleur ».
   B : « Obtenir deux boules portant le numéro 2 »
   C : « Obtenir deux boules dont une seule est blanche et une seule porte le numéro 1 »
   b - Montrer que la probabilité de B sachant A est $p(B/A) = \frac{1}{3}$.

2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le nombre de boules tirées portant le numéro 2.
   a – Déterminer la loi de probabilité de X.
   b – Calculer l'espérance mathématique et l'écart - type de X.

EXERCICE N°2 (6 points)

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2+U_n}. \end{cases}$$

1) a – Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $U_n > 0$.
   b – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-U_n(1+U_n)}{2+U_n}$, et que U est décroissante.
   c – En déduire que U est convergente.

2) Soit V la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{U_n}{1+U_n}$
   a – Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b – Calculer V_n puis U_n en fonction de n.
   c – Trouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

PROBLEME : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A – 1) a – Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - \dfrac{4}{e^x + 1}$.

b – Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) a – Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$.

b – Dresser le tableau de variation de f.

3) a – Montrer que le point A(0 , 1) est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

b – Ecrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

4) Tracer T et $\mathscr{C}$.

B – 1) a – Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-1, 3[$.

b – Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c – Montrer que pour tout $x \in]-1, 3[$; $f^{-1}(x) = \operatorname{Log}\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$.

2) a – Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \operatorname{Log}\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

b - Calculer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $y = -1$, $x = 0$ et $x = 1$.