Section: **Sciences expérimentales** **Session principale 2008**

Matière : Mathématiques

Exercice1 (QCM)

Contenu : Nombres complexes, Equations différentielles.

Aptitudes visées : Déterminer un argument d'un nombre complexe**,** Reconnaitre que deux vecteurs sont colinéaires ou orthogonaux**,** Résoudre une équation différentielle du programme.

1) (a)

Justification (non demandée) : $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ alors $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

2) (c)

Justification (non demandée) :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ $alors$ $\overrightarrow{CD}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{AB}$

3) (b)

Justification (non demandée) : L'ensemble des solutions de l'équation différentielle y'= ay+b ($a\neq 0$) est l'ensemble des fonctions f: $x\mapsto k\,e^{ax}-\frac{b}{a}$, où k est un réel

Exercice 2

Contenu : Limites- continuité- dérivabilité d'une fonction, théorème de la bijection, calcul d'aire plane.

Aptitudes visées : Reconnaitre que le nombre dérivé en a est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a, interpréter graphiquement les limites en termes d'asymptotes ou des branches paraboliques, tracer la courbe de la réciproque d'une fonction donnée, calculer une intégrale à l'aide d'intégration par parties, calculer une aire plane.

1) a)

* f(0) = 0, f(2) = 2, f(2e) = 0, f '(2) = 0

f '(2e) désigne la pente de la tangente (AC) à la courbe Γ Au point A

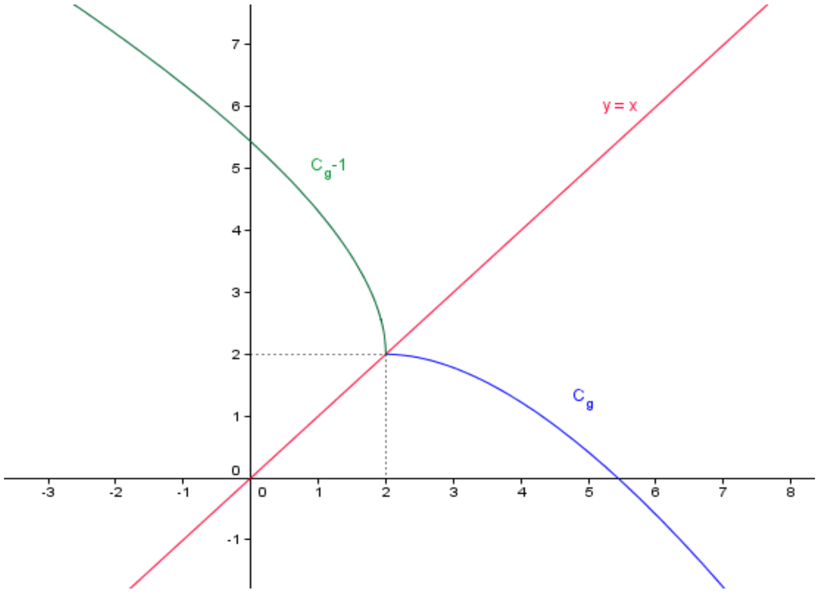
f '(2e) $=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$ = -1

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

c) La fonction g est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$ alors g réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $g([2,+\infty[)$.

De plus g est continue sur $[2,+\infty[$ alors $g([2,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), g(2)\right] =]-\infty,2]$.

2) (C') est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe D : y = x



3)

b) $\int_2^{2e} g(x)dx = \int_2^{2e} x(1+\ln(2)-\ln(x))dx$

$\begin{cases} u(x) = 1+\ln(2)-\ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int_2^{2e} g(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}[1+\ln(2)-\ln(x)]\right]_2^{2e} + \frac{1}{2}\int_2^{2e} xdx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln(2)-\ln(x)) + \frac{3x^2}{4}\right]_2^{2e}$$

$$\int_2^{2e} g(x)dx = 2e^2(1+\ln(2)-\ln(2)-1)+e^2-2-1 = e^2-3$$

c) Par symétrie par rapport à la droite d'équation y = x, on en déduit que l'aire de la partie D est :

A = 4 + 2 $\int_2^{2e} g(x)dx = 2(e^2-1)$ (u a).

Exercice 3

Contenu: Suites réelles

Aptitudes visées: Etudier les variations d'une suite, étudier la convergence d'une suite, reconnaitre que deux suites sont adjacentes.

1) a) (2n+2) –e(2n+1) = 2n+2-2ne-e = 2n(1-e)+2-e $\prec 0$.

b)

* $u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \frac{k}{e^k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{k}{e^k} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \frac{k}{e^k}$

$u_{2n+2} - u_{2n} = (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{e^{2n+1}} + (-1)^{2n+2} \frac{2n+2}{e^{2n+2}} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} + \frac{2n+2}{e^{2n+2}}$

$u_{2(n+1)} - u_{2n} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} + \frac{2n+2}{e^{2n+2}} = \frac{1}{e^{2n+2}}\left[(2n+2) - e(2n+1)\right] < 0$ (d'après 1) a))

2)

* $u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k \frac{k}{e^k} - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \frac{k}{e^k} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} (-1)^k \frac{k}{e^k}$

$u_{2n+3} - u_{2n+1} = (-1)^{2n+2} \frac{2n+2}{e^{2n+2}} + (-1)^{2n+3} \frac{2n+3}{e^{2n+3}} = \frac{2n+2}{e^{2n+2}} - \frac{2n+3}{e^{2n+3}}$

$u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = \frac{2n+2}{e^{2n+2}} - \frac{2n+3}{e^{2n+3}} = \frac{1}{e^{2n+3}}\left[(2n+2)e - (2n+3)\right]$

* (2n+2)e - (2n+3) = 2ne+2e -2n-3 = 2n(e-1)+2e -3 > 0

3) a) $u_{2n+1} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \frac{k}{e^k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{k}{e^k} = (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{e^{2n+1}}$

$u_{2n+1} - u_{2n} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} \prec 0$

b) $\lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} = \lim_{n \to +\infty} -(2n+1)e^{-(2n+1)} = \lim_{N \to -\infty} Ne^N = 0$

(En posant N = 2n+1)

4) $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

- v décroissante
- w croissante.
- $v_n \succ w_n$
- $\lim_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$

Alors les suites v et w sont adjacentes. ($\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$)

La suite u est alors convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

$v_1 \succ v_n \succ w_n \succ w_1$ alors $u_2 \succ v_n \succ u_3$ d'où $u_2 \succ \alpha \succ u_3$

Exercice 4

<u>Contenu:</u> Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, distance d'un point à un plan, calcul de volumes, section d'une sphère par un plan.

<u>Aptitudes visées:</u> Exploiter le produit scalaire dans l'espace, exploiter les propriétés du produit vectoriel, déterminer la section d'une sphère par un plan.

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \vec{N}\begin{pmatrix}-8\\-4\\8\end{pmatrix}.$$

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

c)On désigne par $\mathscr{V}$ le volume du tétraèdre OABC .

$$\mathscr{V} = \frac{1}{6}\left|\vec{N}\cdot\overrightarrow{AO}\right| = \frac{1}{6}\left|24+8-48\right| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \text{ (unités de volume).}$$

Autrement:

$$\mathscr{V} = \frac{1}{6}\left|dét(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO})\right|$$

$$dét(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}) = \begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & -4 & -2\\ -2 & -1 & -6\end{vmatrix} = -44+28 = -16$$

2) $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h = \frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times OH$ où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base ABC.

$$\mathscr{B} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{N}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{64+16+64} = 6 \text{ (unités d'aire)}$$

$$OH = \frac{3\times\mathscr{V}}{\mathscr{B}} = \frac{3\times\frac{8}{3}}{6} = \frac{4}{3}$$

Autrement: $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P = (ABC).

$M \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{N} = 0 \iff -8(x-3) - 4(y-2) + 8(z-6) = 0$

$\iff 2x + y - 2z + 4 = 0$

$OH = d(O,P) = \dfrac{|4|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{4}{3}$

3) a) $d(O,P) = \dfrac{4}{3}$ et $R = OA = \sqrt{9+4+36} = 7$.

$d(O,P) \prec R \Rightarrow S \cap P = (C)$ où (C) est le cercle de centre H.

b) Si r est le rayon du cercle (C) alors: $r = \sqrt{49 - \dfrac{16}{9}} = \sqrt{\dfrac{425}{9}} = \dfrac{\sqrt{425}}{3} = \dfrac{5\sqrt{17}}{3}$

Exercice 5

<u>Contenu:</u> Série statistique à deux caractères : ajustement affine.

<u>Aptitudes visées:</u> Décider à partir d'un nuage de points, de l'utilité d'un ajustement affin, calculer le coefficient de corrélation linéaire et interpréter le résultat.

1) Non, la forme du nuage n'est pas allongée.

2)

a) $\overline{X} = 119,6$ $\sigma_X = 25,36$

b) $\overline{Y} = 25,12$ $\sigma_Y = 11,75$

c) $\rho_{XY} = 0,965$

3) $Y = 2,1463.e^{0,0197 \times 165} = 55,4$ kg