Session PRINCIPALE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

Exercice n°1

A-CONTENU

Limites-Equations differentielles-Probabilité

B-REPONSES

1) Réponse - c - 2) Réponse - b - 3) Réponse - a -

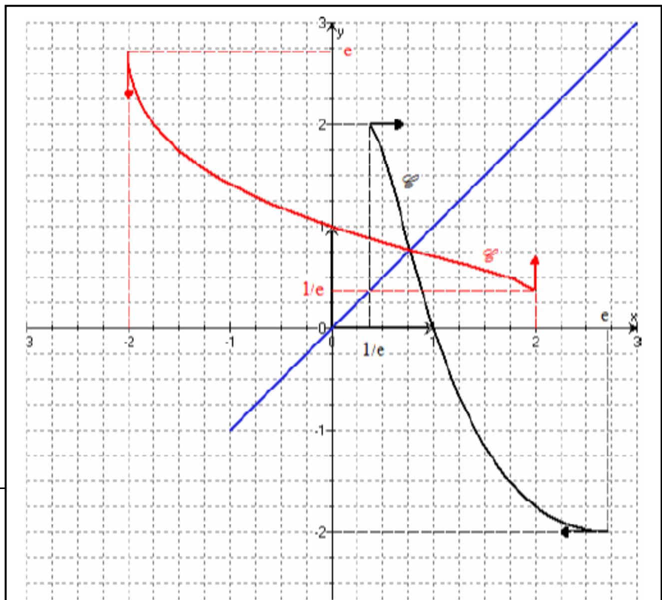
Exercice n°2

A-CONTENU

-fonction logarithme néperien-Fonction réçiproque d'une fonction continue et strictement monotone-

Exploitation d'un graphique-Traçage d'une courbe à partir d'une autre- Calcul intégral-Calcul d'aire

B-SOLUTION



1) a- D'après la courbe la fonction f est continue strictement décroissante sur $\left[e^{-1},e\right]$ donc réalise une bijection de $\left[e^{-1},e\right]$ sur $f\left(\left[e^{-1},e\right]\right)=\left[-2,2\right]$.

b- Voir courbe ci-jointe.

2) a- $a_1=\int_1^e \ln x.dx=\left[x\ln x-x\right]_1^e=1$.

b- $a_{n+1}=\int_1^e (\ln x)^{n+1}\,dx$. On intègre par parties, on pose : $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} & \to u'(x) = \frac{n+1}{x}(\ln x)^n \\ v'(x) = 1 & \to v(x) = x \end{cases}$

Donc : $a_{n+1} = \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n\, dx$

Ainsi : $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$.

c- Comme $a_2 = e - 2a_1 = e - 2$ donc $a_3 = e - 3a_2 = e - 3e + 6$ ainsi $a_3 = 6 - 2e$.

3) a- $\int_1^e f(x).dx = \int_1^e \left((\ln x)^3 - 3\ln x\right)dx = \int_1^e (\ln x)^3\, dx - 3\int_1^e \ln x.dx = a_3 - 3a_1$ donc

$\int_1^e f(x).dx = 6 - 2e - 3 = 3 - 2e$.

b- l'aire demandée est égale à la différence entre l'aire du rectangle de dimensions e et 2 et le réel ($\int_1^e -f(x)dx$)

Ainsi $\mathcal{A} = 2\times e + \int_1^e f(x)dx = 2e + (3-2e) = \mathbf{3}$ **ua**

Exercice n°3

A-CONTENU

Congruence –Divisibilité-Résolution ,dans ZxZ ,d'une équation du type ax+by=c

B-SOLUTION

1) $(-1,-1)$ est une solution particulière de (E): $3x - 8y = 5$.

Donc $3(x+1) = 8(y+1)$ or : $\begin{cases} 3 \wedge 8 = 1 \\ 8/3(x+1) \end{cases}$ donc d'après le lemme de Gauss $8/(x+1)$ par suite

Il existe un entier k tel que $x = 8k - 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ .Remplaçons x par sa valeur on obtient $8(y+1) = 3\times 8k$ $(k \in \mathbb{Z})$ par suite $y = 3k - 1$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Pour la réciproque, il suffit de vérifier que tout entier k le couple $(8k-1, 3k-1)$ est solution de l'équation (E). D'où

$$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \left\{(8k-1, 3k-1)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2) a- On a : $\begin{cases} 3x = n-2 \\ 8y = n-7 \end{cases}$ donc $3x - 8y = (n-2) - (n-7) = 5$ d'où (x,y) est solution de (E)

b- si n est solution (S) alors $\begin{cases} n = 3x+2 & (x \in \mathbb{Z}) \\ n = 8y+7 & (y \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ donc (x,y) est solution de (E) d'où

$\begin{cases} x = 8k-1 \\ y = 3k-1 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$ et par suite $n = 3(8k-1) + 2 = 24k - 1$ ainsi $n \equiv -1 \pmod{24}$ donc $n \equiv 23 \pmod{24}$.

Réciproquement ,soit n un entier vérifiant $n \equiv 23 \pmod{24}$ donc $n = 24K + 23$ $(K \in \mathbb{Z})$ d'où

$\begin{cases} n = 3(8K+7)+2 \\ n = 8(3K+2)+7 \end{cases} (K \in \mathbb{Z})$ ainsi $\begin{cases} n = 3k+2 & (k \in \mathbb{Z}) \\ n = 8k'+7 & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ par suite n est solution de $(S)\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$

3) a- $\begin{cases} 2^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ 7^2 \equiv 1 \pmod 8 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2^{2k} \equiv 1 \pmod 3 \\ 7^{2k} \equiv 1 \pmod 8 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{N})$

b- ● $\begin{cases} 1991 = 3 \times 663 + 2 \\ 1991 = 8 \times 248 + 7 \end{cases}$ ainsi $\begin{cases} 1991 \equiv 2 \pmod 3 \\ 1991 \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ par suite 1991 est solution de (S).

● Comme 1991 est solution de (S) donc $1991 \equiv 23 \pmod{24}$ ou encore $1991 \equiv -1 \pmod{24}$

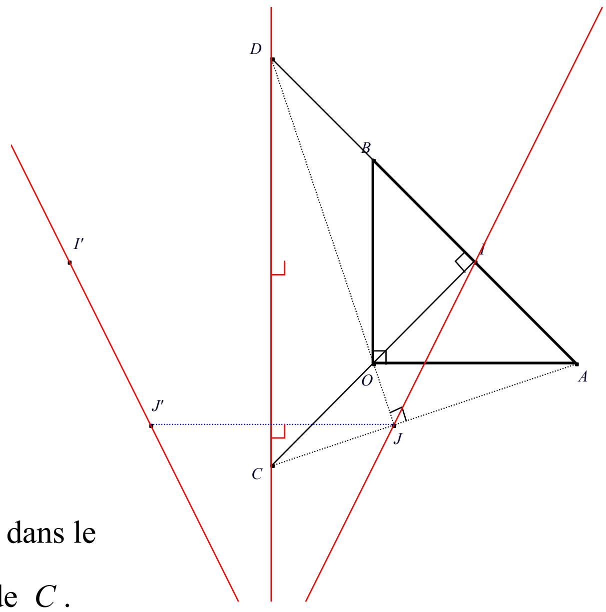
Donc $(1991)^{2008} \equiv (-1)^{2008} \pmod{24}$ d'où $(1991)^{2008} \equiv 1 \pmod{24}$ on en déduit alors que $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice n°4

A-CONTENU

Similitude directe-Similitude indirecte-
Composée de similitudes –Symétrie axiale

B-SOLUTION



1) ● Le rapport de f est : $\dfrac{DC}{AO} = \dfrac{2OB}{OB} = 2$

●L'angle de f est $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2) a- $(IC) \perp (AD)$ car (IO) est la médiatrice de $[AB]$ donc dans le triangle ACD, la droite (IC) porte la hauteur issue de C.

$(AO) \perp (CD)$ donc dans le triangle ACD, la droite (AO) porte la hauteur issue de A.

donc $(IC) \cap (AO) = \{O\}$ est l'orthocentre du triangle ACD.

b- ● $f((OJ))$ est la perpendiculaire à (OJ) passant par $f(O) = C$ qui n'est autre que la droite (AC).

● $f((AJ))$ est la perpendiculaire à (AJ) passant par $f(A) = D$ qui n'est autre que la droite (DJ).

● On a $f((OJ)) \cap f((AJ)) = (AC) \cap (DJ) = \{J\}$, comme $\{J\} = (OJ) \cap (AJ)$ alors

$\{f(J)\} = f((OJ)) \cap f((AJ)) = \{J\}$ donc J est invariant par f,qui est de rapport $\neq 1$ d'où J est l'unique point fixe par f et par suite J est le centre de f.

3) a- ● $\dfrac{ID}{IA} = \dfrac{2IB}{IB} = 2$ donc g est de rapport 2.

● L'axe de g porte la bissectrice intérieur de $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}\right)$ qui n'est autre que (IC).

● Comme la forme réduite de g est $g = h_{(I,2)} \circ S_{(IC)} = S_{(IC)} \circ h_{(I,2)}$ donc

$g(O) = h_{(I,2)} \circ S_{(IC)}(O) = h_{(I,2)}(O) = C$ car $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IO}$.

b- • $g\circ f^{-1}(C)=g(O)=C$ par suite $g\circ f^{-1}(C)=C$.

• $g\circ f^{-1}(D)=g(A)=D$ par suite $g\circ f^{-1}(D)=D$.

• $g\circ f^{-1}$ est la composée d'une similitude indirecte g de rapport 2 et d'une similitude directe f^{-1} de rapport $\frac{1}{2}$ donc $g\circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $2\times\frac{1}{2}=1$ donc c'est un antidéplacement .Comme $g\circ f^{-1}$ fixe les points C et D on a alors $g\circ f^{-1}=S_{(CD)}$.

4) a- • $g\circ f^{-1}(J)=g(J)=J'$ par suite $g\circ f^{-1}(J)=J'$.

• $g\circ f^{-1}(I')=g(I)=I$ par suite $g\circ f^{-1}(I')=I$.

b- Comme $g\circ f^{-1}(J)=J'$ et $g\circ f^{-1}(I')=I$ donc $S_{(CD)}(J)=J'$ et $S_{(CD)}(I)=I'$ d'où

$S_{(CD)}((IJ))=(I'J')$

Montrons que les droites (IJ) et (CD) sont sécantes .

Supposons qu'elles sont parallèles.On a : $S_{(CD)}(J)=J'$ *donc* $(CD)\perp(JJ')$ ce qui donne $(JI)\perp(JJ')$

D'autre part, $f(I)=I'$ *donc* $(JI)\perp(JI')$ car *f est* de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ *Ainsi* , $(JI')\perp(JJ')$

par suite les points J,J'et I' sont alignés ce qui est absurde **.**

les droites (IJ) et (CD) sont sécantes et $S_{(CD)}((IJ))=(I'J')$ Donc les droites $(IJ),(I'J')et(CD)$ sont concourantes

Exercice n°5

A-CONTENU

Produit vectoriel- - Homothétie –Image d'un plan par une homothétie– Plans parallèles –Image d'un tétraèdre par une homothétie-Calcul de volumes .

B-SOLUTION

1) a- Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ ainsi $\begin{cases}x_E=-1+1=0\\y_E=2+0=2\\z_E=1+2=3\end{cases}$ d'où $E(0,2,3)$

b- $\mathcal{V}_{ABCE}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}AE^2=1$ uv.

2) a- $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ donc il est normal au plan (ABC) et

$\overrightarrow{N_{\mathscr{P}}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ donc $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

b- • à partir de la relation $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ on obtient $K(0,1,3)$

• les coordonnées du point K vérifient : $0-2-3+5=0$ donc $K\in\mathscr{P}$.

3) a- On sait que $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ donc $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ ainsi h est de rapport $\frac{1}{3}$.

b- On sait que $\mathcal{V}_{EIJK}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IE}\right|$ or on a :

$h((ABC))$ est un plan parallèle à (ABC) passant par $h(C)=K$ donc $h((ABC))=\mathscr{P}$.

Par suite comme A est un point de (ABC) donc $h(A)$ est un point de $\mathscr{P}$ vérifiant A , $h(A)$ et E alignés. Donc $h(A)=I$.

De même comme B est un point de (ABC) donc $h(B)$ est un point de $\mathscr{P}$ vérifiant B , $h(B)$ et E alignés. Donc $h(B)=J$ de plus, vu que $h(C)=K$ et $h(E)=E$ on aura

$$\mathcal{V}_{EIJK}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IE}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\wedge\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right).\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{27}\left(\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right|\right)=\frac{1}{27}\mathcal{V}_{ABCE}=\frac{1}{27}.$$

Donc le volume du tétraèdre EIJK est $\mathcal{V}_{EIJK}=\frac{1}{27}$.

FIN.