

Examen du baccalauréat (Juin 2008)	Epreuve : MATHEMATIQUE
Section : Economie et Gestion	Session principale

Exercice 1

I- 1) b) 2) c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

II- 1) a) 2) b)

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$$

Exercice 2

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - e$

$$= \frac{1}{e} u_n + e - 1 - e = \frac{1}{e} (u_n - e)$$

$$= \frac{1}{e} v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de 1^{er} terme

$$v_0 = u_0 - e = -e.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\frac{1}{e}\right)^n$ donc

$$v_n = -e \left(\frac{1}{e}\right)^n = -\frac{1}{e^{n-1}}$$

c) (v_n) est une suite géométrique

de raison $\frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e} \in]-1, 1[$ par suite (v_n) converge vers 0.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + e$.

Soit u une suite géométrique de raison q . Si q appartient à $]-1, 1[$, alors u converge vers 0.

La suite (v_n) converge vers 0, donc

la suite (u_n) converge vers e.

Exercice 3 :

1)a) Il y a 3 chemins de sommet B, donc le sommet B est de degré 3.

b) Le sommet B est de degré impair, donc le graphe G n'admet pas de cycle eulérien.

Un graphe connexe G admet un cycle eulérien si et seulement si, chacun de ses sommets est de degré pair.

2)a) Le graphe G est connexe et admet seulement deux sommets

de degrés impairs (les sommets B et E), alors G admet au moins une chaîne eulérienne.

Un graphe connexe G admet une chaîne eulérienne si et seulement si, le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2.

b) B-C-D-B-E-A-D-E et E-A-D-E-B-C-D-B sont des chaînes eulériennes

3) La matrice associée au graphe G est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

1) D'après le tableau de variation, g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et s'annule pour $x=1$. Donc on a

si $0 < x < 1$ alors $g(x) < g(1)$ et par suite $g(x) < 0$

si $x > 1$ alors $g(x) > g(1)$ et par suite $g(x) > 0$

x	0	1	$+\infty$
g(x)	-	0	+

2) f est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

a) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Par suite la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à (C).

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = 0$.

Donc la droite D d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

$$3) \text{ a) Soit } x > 0, f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$$

Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

Tableau de variation de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

4)a) Position relative de la courbe (C) et la droite D

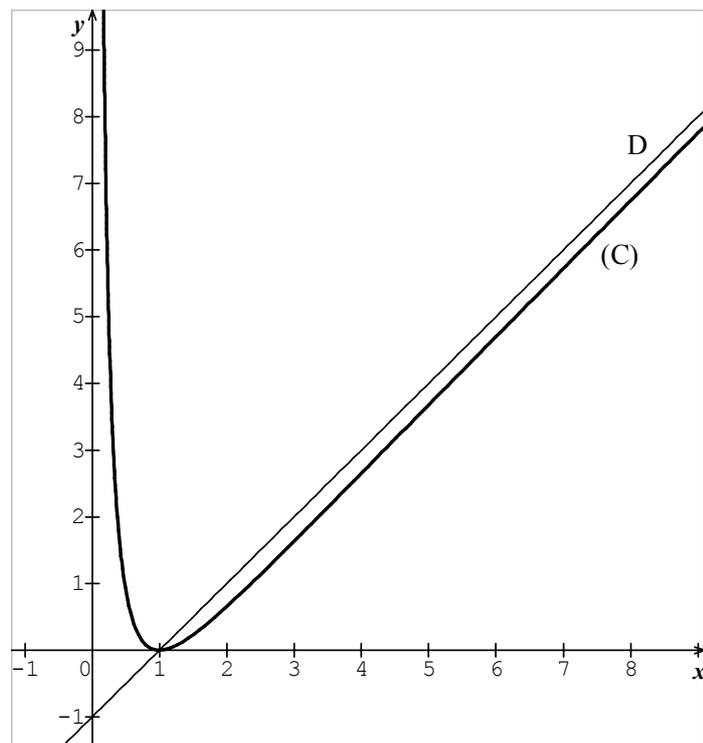
Il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (x - 1)$.

Pour tout $x > 0$,

$$f(x) - (x - 1) = \left(-\frac{\ln x}{x} \right).$$

x	0	1	$+\infty$
$-\frac{\ln x}{x}$	+	0	-
Position de (C) par rapport à D.	(C) est au dessus de D.	(C) est en dessous de D.	

A(1,0)



c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la droite D , la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

(l'unité de longueur est 1cm, l'unité d'aire est 1 cm^2 .)

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e |f(x) - (x - 1)| dx \\ &= \int_1^e \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$(u^2)' = 2u'u.$$

$$\frac{\ln x}{x} \text{ est de la forme } u'u$$