SESSION PRINCIPALE

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

ANCIEN REGIME

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2008

SECTIONS : SCIENCES EXPERIMENTALES + TECHNIQUE
EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 3 h COEF. : 3

Exercice 1 : (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (3 + 4i)z - 8 + 6i = 0$$

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3 - (1 + 4i)z^2 - (14 + 2i)z - 16 + 12i = 0$$

a – Vérifier que (-2) est une solution de (E).

b – Déterminer les nombres complexes b et c tels que

$$z^3 - (1 + 4i)z^2 - (14 + 2i)z - 16 + 12i = (z + 2)(z^2 + bz + c).$$

c – Résoudre alors l'équation (E).

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = -1 + 2i$ et $z_B = 4 + 2i$.

a – Montrer que le triangle OAB est rectangle.

b – Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle OAB et D le point d'affixe $4 - 3i$.
Montrer que la droite (OD) est tangente à $\mathscr{C}$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(2,1,0) ; B(1,2,2) et C(3,3,1).

1) a – Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P.

b – Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x - y + z - 1 = 0$

2) a – Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

b – Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de $\mathscr{E}$ vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

a – Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre I.

b – Vérifier que les points A, B et C appartiennent à (S) ; en déduire l'intersection de la sphère (S) et le plan P.

c – Donner des équations cartésiennes des plans P_1 et P_2 parallèles à P et tangents à la sphère (S).

Problème : (10 points)

I – Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 + 1 - \text{Log}\, x$

1) Etudier les variations de g.
2) En déduire que pour tout réel x strictement positif on a : $g(x) > 0$.

II – Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{\text{Log}\, x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b – Dresser le tableau de variation de f.

2) a – Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

   b – En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α comprise entre 0,4 et 0,5.

3) a – Montrer que la droite $\Delta : y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   b – Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

4) On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de la réciproque f^{-1} de f.
   Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

III – Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = (\text{Log}\, x)^2$.

1) Calculer $h'(x)$, pour tout x de $]0, +\infty[$.

2) Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

3) Soit $\mathscr{A}$ une mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 1$.
   Montrer que $\mathscr{A} = -2\alpha^4 - 2\alpha^3 - \dfrac{3}{2}\alpha^2 - \alpha + 2$.