SESSION PRINCIPALE

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

ANCIEN REGIME

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2008

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 4 h COEF. : 4

Exercice I : (5 points)

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

Soit f la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B .

1) a – Montrer que le rapport de f est $\sqrt{3}$.
   b – Préciser l'axe Δ de f.

2) Soit B' = f(B)
   a – Préciser la nature et les éléments caractéristiques de fof.
   b – En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$. Construire le point B'.
   c – Montrer que BB' = BC .
   d – En déduire que f(I) = J.

3) Soit $S = f \circ S_{(BC)}$ où $S_{(BC)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (BC)
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

Exercice II : (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (6 + 5i)z + 2 + 16i = 0$.

2) Soit $f(z) = z^3 + 2(3 + 2i)z^2 + (7 + 10i)z + 16 - 2i$.
   a – Déterminer le nombre complexe α tel que, pour tout nombre complexe z on a :
   $$f(z) = (z - \alpha)\left(z^2 + (6 + 5i)z + 2 + 16i\right).$$
   b – Résoudre alors l'équation f(z) = 0 .

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = -4 - 2i$ et $z_C = -2 - 3i$ et on désigne par z_I l'affixe du point I milieu de $[AC]$.
   a – Représenter les points A, B, C et I.
   b – Montrer que le triangle ABC est rectangle.

4) a – Construire les points D et E tels que BAD et BEC soient des triangles directs rectangles et isocèles en B.
   Soient z_D et z_E les affixes respectives de D et de E .
   b – Sans calculer z_D et z_E, trouver le module et un argument de $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}$ et en déduire que :
   $$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{z_B - z_E}{z_C - z_B} = i .$$
   c – Montrer que $\frac{z_D - z_E}{2(z_I - z_B)} = i$.
   d – En déduire que DE = 2BI et $(DE) \perp (BI)$.

PROBLEME : (10 points)

I - 1) Soit la fonction g définie par

$$g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - 4\,\text{Log}x$$

a – Etudier les variations de g.

b – Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]1, 2[$.

c – Déduire le signe de g(x).

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\text{Log}\,x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

a – Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{\left(1+x^2\right)^3}$

b – Etudier les variations de f .

3) a – Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 1.

b – Montrer que pour tout $x > 0$, $\text{Log}\,x \leqslant x - 1$.

En déduire que $f(x) - \dfrac{1}{4}(x-1) \leqslant (x-1)\left[\dfrac{4 - \left(1+x^2\right)^2}{4\left(1+x^2\right)^2}\right]$.

c – Déterminer la position relative de ($\mathscr{C}$) par rapport à T.

(on pourra étudier les cas $x \leqslant 1$ et $x > 1$).

d – Tracer T et ($\mathscr{C}$) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\left(\|\vec{i}\| = 1 \;;\; \|\vec{j}\| = 10\right)$

On prendra $\alpha \approx 1{,}45$ et $f(\alpha) \approx 0{,}04$

II – Pour x > 0, on pose : $F(x) = \int_{1/x}^{x} f(t)dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{(1-x^2)\,\text{Log}x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

2) Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \text{tg}(x)$.

a – Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.

b – Montrer que la fonction h^{-1} réciproque de h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

c – Montrer que pour $x > 0$: $F(x) = \dfrac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) - h^{-1}(x)\right] + \dfrac{x\text{Log}x}{1+x^2}$.

3) a – Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

b – Dresser le tableau de variation de F.

c – Soit G la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = F(x)$ si $x > 0$ et $G(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Donner l'allure de la courbe (Γ) représentative de G dans le plan rapporté à un repère orthonormé.