REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2007

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 : (4 points)

1) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
Résoudre l'équation : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$, $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]0, \pi[$.
a – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.
b – Montrer que lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

3) a – Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ du triangle AMN.
b – Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 : (6 points)

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

La bissectrice intérieure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$ coupe [AC] en O.

On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].

1) a – faire une figure.
b – Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].

2) Soit f la similitude directe telle que : f(B) = O et f(H) = H'.
a – Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.
b – Montrer que H' est le milieu du segment [Of(A)].
En déduire que A est le centre de f.

3) Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se recoupent en D.
a – Montrer que les points B, O et D sont alignés.
b – Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que f(C) = D.
c – Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.

4) Soit $g = S_{(DH)} \circ f$, ou $S_{(DH)}$ est la symétrie axiale d'axe (DH).
a – déterminer g(A) et g(C).
b – Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
c – Soit Ω le centre de g.
Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$.
Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.

PROBLEME : (10 points)

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

A –1) Soit g_n la fonction définie sur IR par $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

a – Dresser le tableau de variation de g_n

b – Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans IR une unique solution α_n .

c – Prouver que $-2 < \alpha_n < -1$.

d – En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x) = \dfrac{x\, e^x}{n + e^x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a – Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f_n(x) - x\right]$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}_n$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

b – Montrer que pour tout x de IR, $f'_n(x) = \dfrac{e^x g_n(x)}{(n + e^x)^2}$.

c – Montrer que $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$.

d – Donner le tableau de variation de f_n .

3) a – Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_n$ et de la droite D d'équation $y = x$.

b – Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

c – Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

(On prendra 2 cm pour unité de longueur ; on donne $\alpha_1 \simeq -1{,}4$, $\alpha_2 \simeq -1{,}2$).

B – Soients $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} x\, e^x\, dx$ et $U_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} f_n(x)\, dx$.

1) Calculer I.

2) Montrer que pour tout x de l'intervalle [–1, 0] , $\dfrac{xe^x}{n} \leqslant \dfrac{xe^x}{n + e^x} \leqslant \dfrac{xe^x}{n+1}$.

3) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .

4) On pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$.

a – Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $\displaystyle\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{k+1}$.

b – En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \geqslant \text{Log}\,(n+2) - \text{Log}\, 2$.

c – Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$.