REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2007

SESSION PRINCIPALE

SECTION : ECONOMIE ET GESTION
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 3 heures   COEFFICIENT : 2

Exercice 1 (6 points)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) : $z^2 + 2z + 6 = 0$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^3 + 2(1-i)z^2 + (6-4i)z - 12i = 0$.
   a – Montrer que l'équation (E') admet une solution imaginaire pure.
   b – Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on a :
   $$z^3 + 2(1-i)z^2 + (6-4i)z - 12i = (z-2i)(z^2 + az + b).$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

4) On donne dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = -1 - i\sqrt{5}$ et $z_C = -1 + i\sqrt{5}$.
   a – Montrer que le triangle ABC est rectangle.
   b – Déterminer l'affixe du point D pour lequel le quadrilatère ABDC est un rectangle.

Exercice 2 (6 points)

1) On dispose d'une urne U_1 contenant deux boules rouges et trois boules vertes. Toutes les boules sont supposées indiscernables au toucher.
   L'épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules de l'urne.
   a – Calculer la probabilité p pour que parmi les trois boules tirées, une seule soit rouge.
   b – On désigne par X l'aléa numérique qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique E(X) .

2) On dispose d'une deuxième urne U_2 contenant une boule rouge et quatre boules vertes.
   L'épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à tirer de celle-ci une boule.
   On considère les évènements suivants :
   A : « L'urne choisie est U_1 »
   B : « L'urne choisie est U_2 »
   R : « La boule tirée est rouge »
   a – Calculer p(A), p(B), $p(R/A)$ et $p(R/B)$.
   b – En déduire que p(R) = 0,3.

Problème (8 points)

A – Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = (1-x)\, e^{-x} + 1$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-x} = 0$ et en déduire la limite de g(x) quand x tend vers $+\infty$.

2) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $g'(x) = (x-2)\, e^{-x}$.

3) a – Dresser le tableau de variation de g.

   b – En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $g(x) > 0$.

B – Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x\,(1 + e^{-x})$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = g(x)$.

   b – Dresser le tableau de variation de f.

   c – Soit T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.

   Ecrire une équation de T et en déduire que $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

2) a – Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   b – Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

   c – Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

   d – Tracer T, Δ et $\mathscr{C}$.

3) a – Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$.

   b – En déduire l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.