Section : **Sciences expérimentales** **Session de contrôle 2008**

Matière : **Mathématiques**

Exercice 1

Contenu: Produit scalaire dans l'espace, produit vectoriel, plan de l'espace, distance d'un point à un plan, calcul de volumes, section d'une sphère par un plan.

Aptitudes visées: Exploiter le produit scalaire dans l'espace, déterminer une équation cartésienne d'in plan, déterminer la section d'une sphère par un plan.

1) a)
Justification (non demandée): ABCDEFGH est un cube alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DH}$ donc il est perpendiculaire au plan (BDH) et par suite il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BH}$.

2) c)
Justification (non demandée): On remarque que $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ECG) et que ce plan contient le point A origine du repère.

3) b)
Justification (non demandée): Le plan (BEG) contient le diamètre [EG] de la sphère.

Exercice 2

Contenu: Suite réelle définie à l'aide d'une intégrale.

Aptitudes visées: Calculer une intégrale en utilisant une primitive, étudier les variations d'une suite, étudier la convergence d'une suite..

1)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction : $x \mapsto (\tan(x))^n$ est continue et positive sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

donc $I_n \geq 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{n+1} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\tan(x))^{n+1} - (\tan(x))^n) dx$

$$I_{n+1}\text{-}I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n (\tan(x) - 1) dx$$

De plus, $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$; $0 \leq \tan(x) \leq 1$ (La fonction : $x \mapsto \tan x$ est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$)

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]; \ \begin{cases} (\tan(x))^n \geq 0 \\ 0 \leq \tan(x) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow (\tan(x))^n(\tan(x)-1) \leq 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{I}_{n+1} - I_n \leq 0$$

par suite la suite (I_n) est décroissante.

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{n+2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(\tan^2 x + 1) dx$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+2} + I_n = \left[\frac{(\tan(x))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$$

b) Posons : $L = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = L$

$$I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \qquad \text{alors } \mathrm{L} = 0$$

3)

❖ $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos)'(x)}{\cos x} dx$

$I_1 = -\left[\ln(|\cos x|)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left[\ln(cox)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$I_1 = \ln\cos 0 - \ln(\cos\frac{\pi}{4}) = -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \ln(\sqrt{2})$

❖ $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx$

$I_2 = \left[\tan x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$

❖ $I_2 + I_4 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow I_4 = \frac{1}{3} - I_2$

$I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

Exercice 3

<u>Contenu :</u> Nombres complexes.

<u>Aptitudes visées :</u> Résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 2, déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe, représenter un point connaissant son affixe, décider du parallélisme ou de l'orthogonalité de deux droites. .

1) a) $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$ alors $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1}$.

$$S_{\mathbb{C}} = \{ \ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \ \}$$

b) $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Les solutions sont les deux racines carrées de z_1 et celles de z_2

$S_{\mathbb{C}} = \{ e^{i\frac{\pi}{6}} \;,\; e^{i\frac{7\pi}{6}} \;,\; e^{i\frac{5\pi}{6}} \;,\; e^{-i\frac{\pi}{6}} \}$.

2) On pose $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ *alors* $e^{i\frac{7\pi}{6}} = -z_0$; $e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\overline{z_0}$ *et* $e^{-i\frac{\pi}{6}} = \overline{z_0}$.

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$P(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})(z + z_0)(z + \overline{z_0})$$

$$P(z) = (z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0 \times \overline{z_0})(z^2 + z(z_0 + \overline{z_0}) + z_0 \times \overline{z_0})$$

$$P(z) = (z^2 - 2\operatorname{Re}(z_0)z + |z_0|^2)(z^2 + 2\operatorname{Re}(z_0)z + |z_0|^2)$$

$$P(z) = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$$

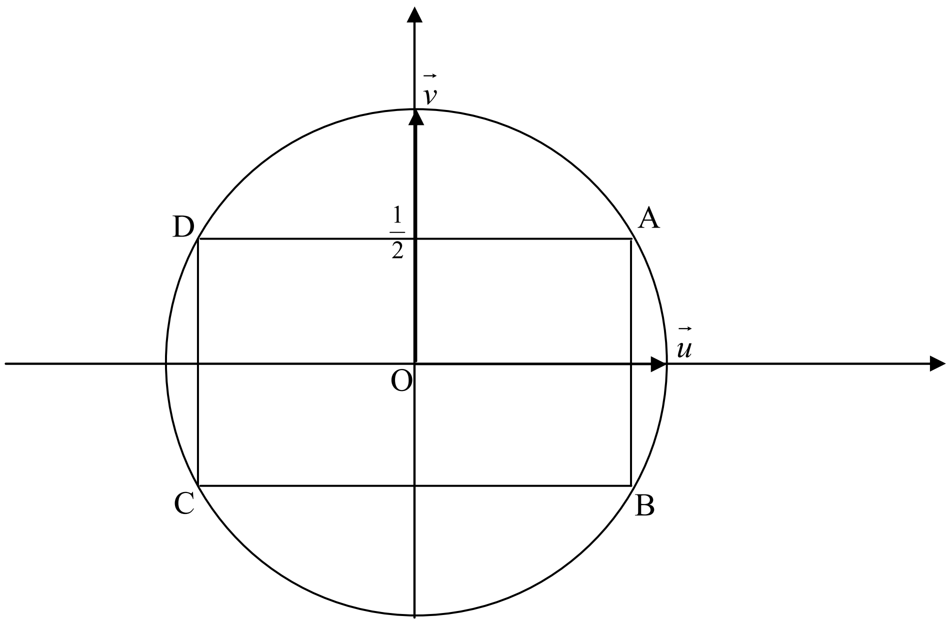
Autrement:

$$P(z) = z^4 + 1 - z^2 = (z^2)^2 + (1)^2 - (z)^2 = (z^2 + 1)^2 - 2z^2 - (z)^2 = (z^2 + 1)^2 - 3z^2$$

$$P(z) = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}z)^2 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z + \sqrt{3}z + 1)$$

3)

a)



b)

- ❖ $z_A + z_C = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = 0 \Rightarrow O = A * C$
- ❖ $z_B + z_D = e^{i\frac{-\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} = 0 \Rightarrow O = B * D$

Le quadrilatère ABCD est alors un parallélogramme.

- ❖ $AC = |z_C - z_A| = |z_C + z_C| = 2|z_C| = 2$
- ❖ $BD = |z_D - z_B| = |z_D + z_D| = 2|z_D| = 2$

Le parallélogramme ABCD est alors un rectangle.

Remarque : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OD}}) - (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}})[2\pi]$

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ Alors ABCD n'est pas un carré.

Exercice 4

<u>Contenu :</u> Limites- continuité- dérivabilité d'une fonction, calcul d'aire plane.

<u>Aptitudes visées :</u> Reconnaitre que le nombre dérivé en a est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a, interpréter graphiquement les limites en termes d'asymptotes ou des branches paraboliques, déterminer la dérivée d'une fonction, calculer une intégrale en utilisant une primitive, calculer une aire plane.

1) a) Si (Γ) était la courbe de f ' alors f serait croissante sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est pas vrai.
Donc la courbe de f ' est $(\mathscr{C})$ et celle de f est (Γ).

b) f(0)= 1 , f '(0)=0 et f '(1)=0.

c)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{e}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2)
a)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x+x^2) - e^x(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{e^x(1+x+x^2-2x-1)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{xe^x(x-1)}{(1+x+x^2)^2}$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f'(x) = \frac{e^x}{1+x+x^2} - \frac{xe^x(x-1)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{(1+2x)e^x}{(1+x+x^2)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2} \times f(x)$

c) $M(x,y) \in (\zeta) \cap (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\zeta) \\ M \in (\Gamma) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = f'(x) \end{cases}$

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$(\zeta) \cap (\Gamma) = \left\{ E(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \right\}$$

d) Voici une méthode parmi d'autres.

* On pose : u(x)= $1+x+x^2$ alors u'(x)=2x+1

Tableau de variation de f sur IR

x		$\frac{-1}{2}$	
u'(x)	-	¦	+
u(x)	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$

D'après le tableau de variation de u, on a : $u(x) \geq \frac{3}{4}$ pour tout réel x

$u(x) \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{1+x+x^2} \geq \frac{4}{3}$ (1)

* D'autre part ; x $\geq \frac{-1}{2} \Rightarrow e^x \geq e^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow e^x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$ (2)

D'après (1) et (2) on en déduit que $f(x) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}}$ et par conséquent

Pour tout x $\geq \frac{-1}{2}$ on a : $f(x) - f'(x) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}} \cdot \frac{1+2x}{1+x+x^2}$

3)

a) $A(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t} |f(x) - f'(x)|dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{t} f(x) - f'(x)dx$

$$A(t) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}} \int_{-\frac{1}{2}}^{t} \frac{2x+1}{1+x+x^2} dx$$

$$A(t) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}} \left[\ln(1+x+x^2) \right]_{-\frac{1}{2}}^{t}$$

$$A(t) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(1+t+t^2) - \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$$

$$A(t) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(1+t+t^2) - \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(\frac{3}{4})$$

b) $\begin{cases} A(t) \geq \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(1+t+t^2) - \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(\frac{3}{4}) \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(1+t+t^2) - \frac{4}{3\sqrt{e}} \ln(\frac{3}{4}) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$