Session de CONTROLE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

Exercice n°1

A-CONTENU

Calcul intégral-limites –Congruences

B-REPONSES

1) Réponse - b - 2) Réponse - c - 3) Réponse - c -

Exercice n°2

A-Contenu

-Résolution dans C d'une équation du troisième degré admettant une racine réelle .

-Similitude directe.

B- SOLUTION

$$(E): z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0$$

1) a- Soit $z_0 = x$ $(x \in \mathbb{R})$ une solution réelle de (E) . Alors :

$x^3 + (5+i)x^2 + (10+2i)x + 8 = 0$ donc $(x^3 + 5x^2 + 10x + 8) + i(x^2 + 2x) = 0$ par suite

$\begin{cases} x^3 + 5x^2 + 10x + 8 = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x^3 + 5x^2 + 10x + 8 = 0 \\ x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{cases}$ ainsi $\boxed{z_0 = -2}$

(car z =0 n'est pas une solution de (E))

b- comme $z_0 = -2$ est une solution de (E), donc il existe deux nombres complexes *b* et *c* tels que

$z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8=(z+2)(z^2+bz+c)$

par identification ,on obtient :b=3+i et c=4.

Par suite $(E):(z+2)(z^2+(3+i)z+4)=0$ donc $\begin{cases} z=-2 \\ z^2+(3+i)z+4=0 \end{cases}$

Résolvons l'équation $z^2+(3+i)z+4=0$

$\Delta=(3+i)^2-16=-8+6i=(1+3i)^2$ ce qui donne $\begin{cases} z'=\frac{1}{2}(-3-i-1-3i)=-2-2i \\ z''=\frac{1}{2}(-3-i+1+3i)=-1+i \end{cases}$

Conclusion : les solutions de l'équation (E) sont donc -2 , -2-2i et $-1+i$

2) a- L'écriture complexe de f est de la forme $z'=az+b$ où $a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (complexe non nul) et $b=0$ donc f est une similitude directe de rapport $k=\sqrt{2}$, de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

b- On a $MM'=|(1+i)z-z|=|iz|=|z|=OM$

D'autre part , $M'=f(M)$ donc $OM'^2=2OM^2$

par suite $MM'^2+OM^2=2OM^2=OM'^2$

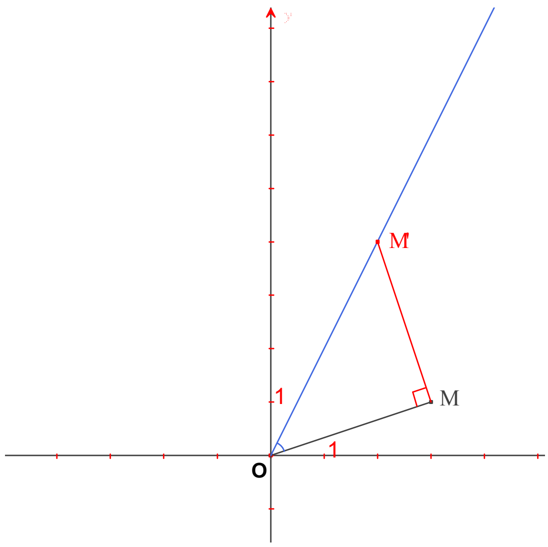
Ainsi OMM' est un triangle rectangle et isocèle en M.

<u>Construction</u> :

On construit la demi-droite $[Ot)$

tel que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Ot})\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

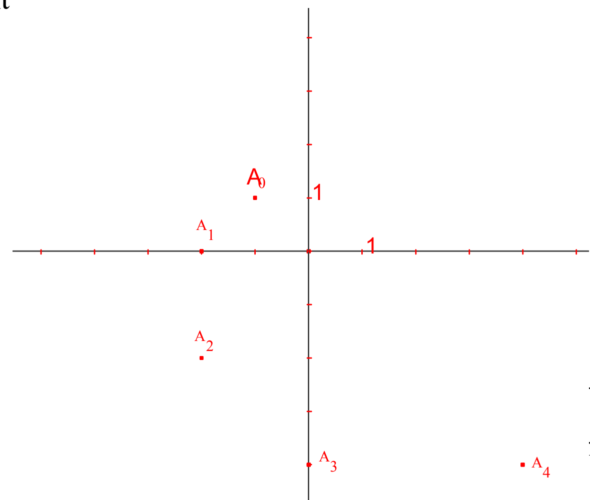
La perpendiculaire à (OM) issue de M coupe $[Ot)$ en M' d'où la construction.



3) a- pour tout $n\in\mathbb{N}$, désignons par z_n l'affixe du point A_n . comme $A_{n+1}=f(A_n)$ alors $z_{n+1}=(1+i)z_n$.

Par suite $A_0(-1+i)$; $A_1(-2)$; $A_2(-2-2i)$

$A_3(-4i)$ et $A_4(4-4i)$.



b- On a : $z_n = (1+i)\, z_{n-1}$

On établit par recurrence que pour tout entier naturel

non nul n on a $z_n = (1+i)^n z_0$

Les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_n}{z_0}$ est réel

$\frac{z_n}{z_0}$ est réel si et seulement si $\arg(1+i)^n = k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$ si et seulement si $\boxed{n \equiv 0 \pmod 4 \textit{ et n non nul.}}$

Exercice n°3

A-CONTENU

-Antidéplacement : symétrie , symétrie glissante.

B-SOLUTION

1) a- $AB \neq 0$ et $AB = BD$ car ABD est équilatéral

alors il existe un unique antidéplacement f qui
envoie A sur B et B sur D.

b- On a $f \circ f(A) = D \neq A$

donc f est une symétrie glissante de vecteur
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}$ $\left(\text{car } f \circ f = t_{\overrightarrow{2u}}\right)$ et d'axe la droite passant par le point $I = A * B$ et par le point $0 = B * D$
.donc l'axe de cette symétrie glissante est la droite (OI).

c- L'image du triangle direct ABD est un triangle indirect qui lui est isométrique
dont $f(A) = B$ et $f(B) = D$ sont deux sommets par suite l'image par f du triangle ABD est le triangle BDC

2) a- $\left.\begin{array}{r} s(\{A,B,D\}) = \{B,C,D\} \\ s(A) = C \\ s \text{ est une bijection} \end{array}\right\}$ donc $s(\{B,D\}) = \{B,D\}$ ainsi $s([BD]) = [BD]$.

b- d'après ce qui précède on a

$s([BD]) = [BD]$ et comme $O = B * D$ donc $s(O) = O$ par suite s est un antidéplacement
Qui fixe le point O d'où il s'agit d'une symétrie orthogonale d'axe (BD)

3) a- $\left.\begin{array}{r} g(\{A,B,D\})=\{B,C,D\} \\ g(A)=D \\ g \text{ est une bijection} \end{array}\right\}$ donc $g(\{B,D\})=\{B,C\}$ par suite on obtient : $g(D)=B$ ou $g(D)=C$

or si $g(D)=C$ on aura $g(B)=B$ par suite g est une symétrie orthogonale ce qui n'est pas le cas car $g\circ g(A)=C\neq A$ donc $g(D)=B$.

b- on a déjà $g(A)=D$, $g(D)=B$ et g n'est pas une symétrie orthogonale car $g\circ g(A)=B\neq A$ donc g est une symétrie glissante donc de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}$

$\left(\text{car } g\circ g=t_{\overrightarrow{2u}}\right)$ et d'axe la droite passant par $J=A*D$ et par $0=B*D$ donc l'axe de la symétrie glissante g est la droite (OJ).

Exercice n°4

A- CONTENU

-Fonction Logarithme.

-Continuité , dérivabilité, positions relatives de deux courbes.

-Calcul intégral, calcul d'aire .

B- SOLUTON

1) posons $t=x+2$

a- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x+2)\ln(x+2)=\lim\limits_{t\to0^+} t\ln t=0=f(-2)$

Donc f est continue à droite en (-2).

b- $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\ln(x+2)=\lim\limits_{t\to0^+}\ln t=-\infty$

c- f est dérivable sur $]-2,2]$ et on a :

$f'(x)=1+\ln(x+2)$. $f'(x)\geq0 \Leftrightarrow x\geq e^{-1}-2$

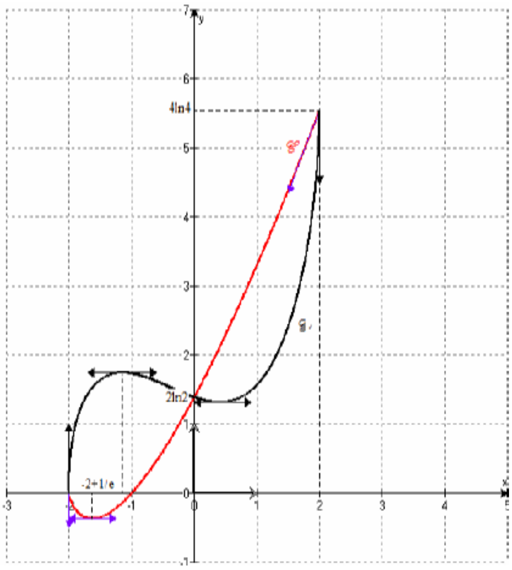
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\ln(x+2)=\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln t=+\infty$

x	-2		$e^{-1}-2$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a- $g(x)-f(x)=-x\sqrt{4-x^2}$

x	-2		0		2
$g(x)-f(x)$		$+$	O	$-$	
position	C Au dessous De C'				

Pour x $\in[-2,0]$ la courbe C est au dessus de la courbe C' et pour x $\in[0,2]$ la courbe C est au dessous de la courbe C' b-



3) a-

- Si $\alpha < 0$ on obtient $\mathcal{A}_\alpha = \int_\alpha^0 \left(g(x) - f(x)\right)dx = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$
- Si $\alpha > 0$ on obtient $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$

Ainsi pour tout $\alpha \in [-2, 2] \setminus \{0\}$ $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$

b- $\mathcal{A}_\alpha = -\frac{1}{2}\int_0^\alpha -2x\sqrt{4-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left[(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\right]_0^\alpha = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}(4-\alpha^2)\sqrt{4-\alpha^2}$.

c- $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2} + \mathcal{A}_2 = \frac{16}{3}$ u.a.

Exercice n°5

A-CONTENU

-Suite de fonctions ; suites numériques ;convergences de suites

B-SOLUTION

-1) $f_n'(x) = -e^{-x} - (2n+1)x^{2n} < 0$ sur $[0,1]$ donc

f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 1
$f_n'(x)$	$-$
$f_n(x)$	$1 \searrow e^{-1}-1$

2) f_n est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$

sur $f([0,1]) = [e^{-1}-1, 1]$ et comme $0 \in]e^{-1}-1, 1[$ alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $u_n \in]0,1[$

3) a- Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}(1-x^2) > 0$
donc pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b- Pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour $x = u_{n+1}$ on aura $\boxed{f_n(u_{n+1}) < 0}$.

c- • $f_n(u_{n+1}) < 0$ donc $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement décroissante alors sa réciproque l'est aussi et par suite $u_{n+1} > u_n$ ainsi (u_n) est une suite <u>croissante.</u>

• (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc elle est convergente .

4) a- $f_n(u_n) = 0$ donc $e^{-u_n} = (u_n)^{2n+1}$ ainsi $\boxed{\ln u_n = -\frac{u_n}{2n+1}}$.

b- Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{u_n}{2n+1}\right)$ donc $\ln \ell = 0$ par suite $\boxed{\ell = 1}$.

<u>FIN</u>.