REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

SESSION DE CONTROLE — ANCIEN REGIME

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2008

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4 h** **COEF. : 4**

Exercice I : (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$ et par K l'image de O par la symétrie orthogonale d'axe (AD).

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) a – Déterminer R(B) et R(I).
b – Montrer que R(O) = K.

2) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre B et de rayon AB.
Pour tout point M du cercle $(\mathscr{C})$ on désigne par N son image par la rotation R et par P le milieu de [MN].
a – Montrer que P est l'image de M par une similitude dont on déterminera les éléments caractéristiques.
b – Déterminer et construire l'ensemble des points P lorsque M varie sur le cercle $\mathscr{C}$.

3) Soit $f = R\circ S_{(BD)}$ où $S_{(BD)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (BD).
a – Déterminer f(B) et f(O).
b – En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4) Soit g la similitude directe définie par : $g = R\circ h$ où h est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.
a – Déterminer g(A) et g(D).
b – Préciser le rapport et l'angle de g.
c – Construire le centre Ω de g.

Exercice II : (4 points)

Une urne contient quatre boules rouges et deux boules blanches indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément trois boules de l'urne et on désigne par X l'aléa numérique qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X.

2) L'urne contient toujours quatre boules rouges et deux boules blanches. On considère maintenant l'épreuve E suivante :
On tire une première boule, puis, sans la remettre dans l'urne, on tire simultanément deux boules et on considère l'événement A « obtenir deux boules rouges et une boule blanche à la fin des deux tirages ».
a – Montrer que $p(A) = \frac{3}{5}$
b – On répète n fois de suite l'épreuve E en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.
Calculer la probabilité p de l'événement « réaliser A au moins une fois ».
c – Déterminer n pour que l'on ait $p \geqslant 0,99$.

PROBLEME : (10 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)\, e^{2x}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) a – Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I qu'on précisera.
   b – Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point I.
   c – Tracer T et $(\mathscr{C})$.
3) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x}dx$.

   a – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^2}{n+1}$$

   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

   b – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2\, I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1$.

   en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, I_n$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \dfrac{2^n}{n!}\, I_n$.

   a – Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2^{n-1}}{n!} \leqslant 1$.

   b – En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leqslant \dfrac{2\,e^2}{n+1}$.

   c – Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

6) a – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = -\dfrac{2^n}{(n+1)!} + U_n$.

   b – Montrer alors, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \frac{1}{2}\left[e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right]$$

   c – En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{2^k}{k!}$.