REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2007

SESSION DE CONTROLE

SECTIONS : SCIENCES EXP. + TECHNIQUE
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 3 heures **COEFFICIENT : 3**

EXERCICE 1 (5 points)

Soit θ un réel appartenant à $[0,\pi]$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 1 - i\,e^{2i\theta} = 0$.

1) Résoudre (E) pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2) a – Vérifier que $e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$ est une racine carrée de ($i\,e^{2i\theta}$).
b – Résoudre (E).

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, C et I les points d'affixes respectives $2i$, $i + e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$, $i - e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$ et i.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon 1.
a – Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$. En déduire que [BC] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.
b – Montrer alors que pour θ différent de $\frac{\pi}{4}$, le quadrilatère OBAC est un rectangle.

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne U_1 contient cinq boules numérotées 0, 0, 1, 1, 2 et une urne U_2 contient cinq boules numérotées 0, 1, 1, 1, 2 . Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
L'épreuve consiste à tirer une boule de U_1 et une boule de U_2.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « obtenir deux boules numérotées 1 ».
B : « obtenir exactement une boule numérotée 1 ».

2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le produit des numéros des deux boules tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

3) Soit E l'événement «obtenir un produit nul sachant qu'une des deux boules tirées est numérotée 1». Calculer la probabilité de E.

PROBLEME : (10 points)

I – Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x + 2 - x$.

1) Étudier les variations de la fonction h.

2) En déduire que pour tout réel x , on a : $h(x) > 0$.

II – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (x-1)\,e^{-x}$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^{-x}\,h(x)$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) a – Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   b – En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que α vérifie :
   $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

4) a – Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$.
   b – Étudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à (Δ) .

5) a – Montrer que la courbe ($\mathscr{C}$) admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.
   b – Vérifier qu'une équation cartésienne de la tangente (T) à ($\mathscr{C}$) au point I est :
   $(e^3 - 1)x - e^3\,y + 5 = 0$.

6) Tracer (Δ) , (T) et ($\mathscr{C}$) .

7) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$), l'asymptote (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.
   a – Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) - x = 1 + e^{-x} - f'(x)$.
   b – Montrer que $\mathscr{A} = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}$.