REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT

SESSION DE JUIN 2007

SESSION DE CONTROLE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a – Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
   b – Dresser le tableau de variation de f.
   c – Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) Soit F la fonction définie sur $]0,1]$ par $F(x) = \int_1^{1+(\mathrm{Log}\,x)^2} f(t)dt$.
   a – Montrer que F est dérivable sur $]0,1]$ et que $F'(x) = 2\,\mathrm{Log}\,x$
   b – Calculer F(x).

3) Pour tout $\alpha \geqslant 1$, on désigne par $S(\alpha)$ l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.
   a – Montrer que $S(\alpha) = F(f(\alpha))$.
   b – Calculer $S(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$.

EXERCICE 2 : (4 points)

Une urne contient quatre dés indiscernables au toucher.
Trois dés sont verts et leurs faces sont numérotées 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.
et un dé est rouge et ses faces sont numérotées 2 , 2 , 4 , 4 , 6 , 6.

1) On tire au hasard un dé.
   Calculer les probabilités des événements suivants :
   A « le dé tiré est rouge »
   B « le dé tiré est vert ».

2) Une épreuve consiste à tirer au hasard un dé puis le lancer trois fois de suite.
   On désigne par C l'événement suivant :
   C « obtenir 3 fois de suite un numéro pair »
   a – Montrer que $p\left(C/A\right) = 1$ et $p\left(C/B\right) = \frac{1}{8}$
   b – En déduire p(C) .

3) Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'on a obtenu une face dont le numéro est pair.
   a – Déterminer la loi de probabilité de X.
   b – Calculer l'espérance et la variance de X.

PROBLEME : (10 points)

Soient A et I deux points du plan et soit R la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On pose $O = R(A)$ et $B = R(O)$.

1) a – Construire les points O et B.
   b – Montrer que le quadrilatère IBOA est un losange.

2) Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OI.
   Soit M un point de ce cercle et M' son image par la rotation R.
   a – Montrer que lorsque le point M décrit le cercle (Γ), son image M' décrit un cercle (Γ') qu'on précisera et qu'on construira.
   b – Soit Ω le deuxième point d'intersection des cercles (Γ) et (Γ').
   Montrer que si M est différent de I, les points M, Ω et M' sont alignés.

3) Soit f l'antidéplacement défini par $f(A) = O$ et $f(O) = B$.
   a – Montrer que f est une symétrie glissante. Préciser son axe et son vecteur.
   b – Vérifier que $f = s_{(OB)} o R$ où $s_{(OB)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe la droite (OB).
   c – Déterminer l'ensemble des points N du plan tels que $R(N) = f(N)$.

4) Soit C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et B.
   On désigne par S la similitude directe définie par $S(A) = C$ et $S(O) = D$ et on pose $h = SoR^{-1}$.
   a – Déterminer h(O) et h(B).
   b – En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
   c – Déterminer alors les éléments caractéristiques de la similitude S.

5) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C) = O$ et $g(D) = B$.
   a – Déterminer le rapport de g. En déduire que g admet un seul point invariant qu'on notera J.
   b – On désigne par (d) l'axe de la similitude g et par E le point d'intersection des droites (d) et (OC).
   Soit E' l'image de E par g. (Il est conseillé de faire une figure d'étude à part pour cette question).
   Montrer que $\overrightarrow{JE'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JE}$.
   c - Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{JE}}\right) [2\pi]$.
   En déduire que les droites (d) et (CD) sont parallèles.
   d – soit C' le symétrique du point C par rapport à la droite (d). Montrer que E est le centre de gravité du triangle JCC' et en déduire que $\overrightarrow{EC} = -2\,\overrightarrow{EO}$.
   e – Construire alors le point E, l'axe (d) et le centre J de la similitude g.