RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4 points)

Une étude statistique montre que dans une ville, 10% des personnes pubères sont atteintes par une maladie M.
On choisit au hasard un couple marié dans cette ville et on désigne par :

- A l'événement : « le mari est atteint par la maladie M »,
- B l'événement : « l'épouse est atteinte par la maladie M ».

On admet que les événements A et B sont indépendants.

1. Déterminer $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.
2. On considère les événements suivants :
   - M_0 : « Aucun des deux conjoints n'est atteint par la maladie M »,
   - M_1 : « Un seul conjoint est atteint par la maladie M »,
   - M_2 : « Le mari et son épouse sont atteints par la maladie M ».

   Justifier que $p(M_2) = 0.01$, $p(M_0) = 0.81$ et $p(M_1) = 0.18$.
3. Ce couple vient d'avoir un nouveau-né.
   On note E l'événement : « Le nouveau-né est atteint par la maladie M ».
   L'étude montre que la probabilité qu'un nouveau-né soit atteint par la maladie M est égale à :
   - 0.02 si aucun de ses parents n'est atteint par la maladie M,
   - 0.1 si un seul de ses parents est atteint par la maladie M,
   - 0.25 si ses deux parents sont atteints par la maladie M.

   a) Déterminer $p(E \cap M_2)$, $p(E \cap M_0)$ et $p(E \cap M_1)$.
   b) En déduire que $p(E) = 0.0367$.
   c) Calculer la probabilité qu'aucun des parents n'est atteint par la maladie M sachant que leur nouveau-né est atteint. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4}.
4. On choisit au hasard n nouveaux nés dans cette ville, où n est un entier supérieur ou égal à 2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de nouveaux nés atteints par la maladie M, parmi les n nouveaux nés choisis. **On suppose que X suit une loi binomiale.**
   a) Déterminer les paramètres de X.
   b) Déterminer la probabilité p_n qu'aucun des nouveaux nés ne soit atteint par la maladie M.
   c) Déterminer la plus grande valeur de n pour que $p_n \geq 0.75$.

Exercice 2 (5.5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+(1-3i\sqrt{3})z-8=0$.

A/ 1. a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $(3-i\sqrt{3})^2$.

b) Résoudre l'équation (E).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans **la figure 1 de l'annexe,** les points I et A sont d'affixes respectives 1 et $a=1+i\sqrt{3}$.

2. a) Vérifier que $a=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis écrire $\frac{1}{a}$ et a^2 sous forme exponentielle.

b) Construire dans la figure 1, les points B et C d'affixes respectives $\frac{1}{a}$ et a^2.

B/ Dans la figure 1 de l'annexe, M est un point de la droite (IA) d'affixe z et distinct de I.

On désigne par N , P et P' les points d'affixes respectives z^2, $\frac{1}{z}$ et $\overline{z}$.

1. Justifier que $\mathrm{Re}(z)=1$.

Dans la suite, on pose $z=1+ib$, où b est un réel non nul.

2. a) Montrer que les droites (MN) et (OM) sont perpendiculaires.

   b) Vérifier que $\mathrm{Im}(z^2)=2\,\mathrm{Im}(z)$.

   c) Construire alors le point N.

3. a) Montrer que les points O, P et P' sont alignés.

   b) Justifier que les points I et P sont distincts.

   c) Montrer que le point P appartient au cercle de diamètre [OI].

   d) Construire alors le point P.

Exercice 3 (3.5 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n=\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{\ln x}{x}\,dx$ et $v_n=\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{\ln x}{x\sqrt{1+x}}\,dx$.

1. a) Montrer que $u_n=\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2u_n=\frac{1}{2}$.

2. a) Montrer que $\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{1+x}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}$, pour tout réel x tel que $1\le x\le 1+\frac{1}{n}$.

   b) En déduire que $\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\times u_n\le v_n\le\frac{1}{\sqrt{2}}\times u_n$.

   c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2v_n$.

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^{-x}+x$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I) 1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

2. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrer que la droite $(D): y=x$ est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier la position relative de (ζ) et (D).

II) Dans **la figure 2** de l'annexe, (Γ) est la courbe de la fonction f' dérivée de f.

La courbe (Γ) admet une unique tangente horizontale au point $F\left(1, 1-\frac{1}{e}\right)$.

1. a) En utilisant le graphique, justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

Vérifier que $\alpha\in\left]-0.7,-0.6\right[$.

2. a) Soit f" la fonction dérivée seconde de f.

Utiliser le graphique pour déterminer $f''(1)$ et le signe de $f''(x)$.

b) Soit le point $E(1, f(1))$.

Montrer que E est un point d'inflexion de (ζ).

3. Soit (T) la tangente à (ζ) au point E.

a) Montrer qu'une équation de (T) est $y=\left(1-\frac{1}{e}\right)x+\frac{3}{e}$.

b) Vérifier que le point $G(3, 3)$ appartient à (T).

c) Justifier que $\overrightarrow{OF}$ est un vecteur directeur de (T).

d) Construire dans la figure 2 la tangente (T) puis placer le point E.

4. a) Vérifier que le point $J(0, 1)$ appartient à $(\zeta)\cap(\Gamma)$.

b) Tracer la courbe (ζ).

5. Soit $\mathcal{A}$ l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x=-1$ et les courbes (ζ) et (Γ).

a) Montrer que $\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}\,dx=e-2$.

b) Calculer $\mathcal{A}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

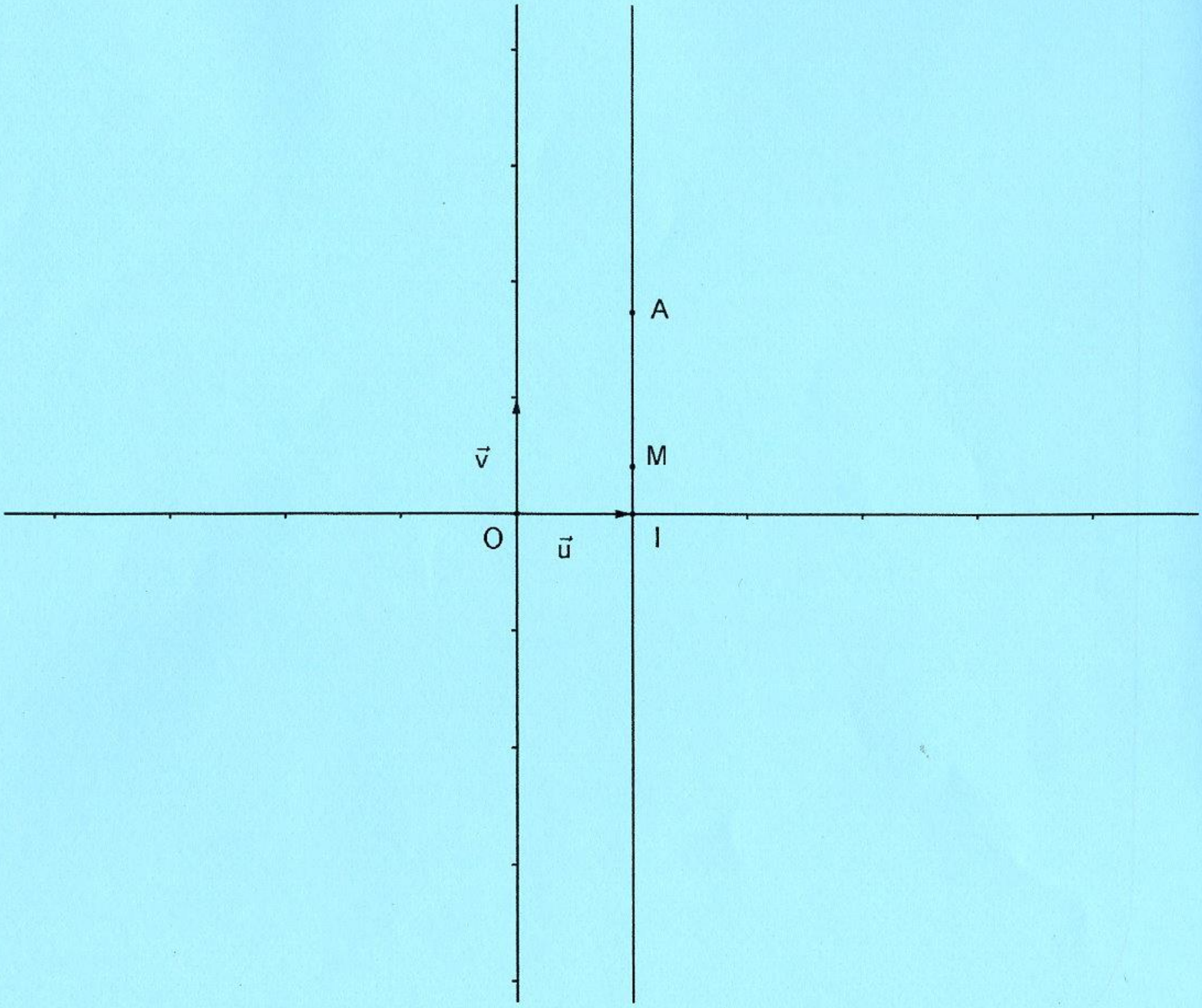
Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2023)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1



Ne rien écrire ici

Figure 2