RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte 4 pages. ***(La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie)***

Exercice N°1 :(5 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(5+5i)z-2+14i=0$.

   a) Vérifier que $(3-i)^2=8-6i$.

   b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A et D d'affixes respectives $z_A=4+2i$ et $z_D=1+3i$.

   a) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, placer les points A et D.

   b) Montrer que $(z_A-z_D)\overline{z_D}=-10i$.

   c) Montrer que le triangle OAD est isocèle rectangle en D.

3) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{5}$.

   a) Vérifier que le point A appartient à $(\mathscr{C})$.

   b) La droite (OD) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en un point B tel que $\mathrm{Re}(z_B)>0$.

   Construire le cercle $(\mathscr{C})$ et placer le point B.

4) a) On pose $\alpha=z_B\overline{z_D}$. Justifier que α est un réel.

   b) Montrer que $|\alpha|=10\sqrt{2}$.

   c) Montrer que $z_B=\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$.

Exercice N°2 :(4 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de la matrice A et déduire que A est inversible. (On notera A^{-1} la matrice inverse de A).

2) a) Calculer la matrice A^2.

b) Vérifier que $A^2 + A = 2I_3$, où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

c) Montrer que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3)$.

3) On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} -3x + 4y + 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -3 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ où x, y et z des réels.

a) En utilisant l'écriture matricielle du système (S), montrer que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Résoudre alors le système (S).

Exercice N°3 :(5 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 7x - 6y = 3$.

1) a) Vérifier que le couple $(3,3)$ est une solution de l'équation (E).

b) Montrer que l'ensemble des couples (x,y) solutions de l'équation (E) est

$\{(6k + 3, 7k + 3), k \in \mathbb{Z}\}$.

2) Soit (x,y) une solution de l'équation (E) et $d = PGCD(x,y)$.

Montrer que $d = 1$ ou $d = 3$.

3) On pose $a = 6 \times 5^{2023} + 3$ et $b = 7 \times 5^{2023} + 3$.

a) Vérifier que le couple (a,b) est une solution de l'équation (E).

b) Vérifier que $5^2 \equiv 1[3]$ et déterminer le reste de la division euclidienne de b par 3.

c) Déterminer $PGCD(a,b)$.

4) a) Soit k un entier relatif. Montrer que si 3 divise $(7k + 3)$ alors 3 divise k.

b) Montrer que l'ensemble des couples (x,y) solutions de l'équation (E) tels que

$PGCD(x,y) = 3$ est $\{(18p + 3, 21p + 3), p \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice N°4 :(6 points)

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{2x}-2x$.

   a) Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

   b) Déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)>0$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x^2+\frac{1}{2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

   b) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=x^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{x}\right)^2-1\right]+\frac{1}{2}$.

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   c) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α et que $-0,8<\alpha<-0,7$.

4) a) Montrer que le point $I(0,1)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C).

   b) Montrer qu'une équation de la tangente T à (C) au point I est $y=x+1$.

5) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, tracer la tangente T et la courbe (C).

6) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

   Calculer $\mathcal{A}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2023)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

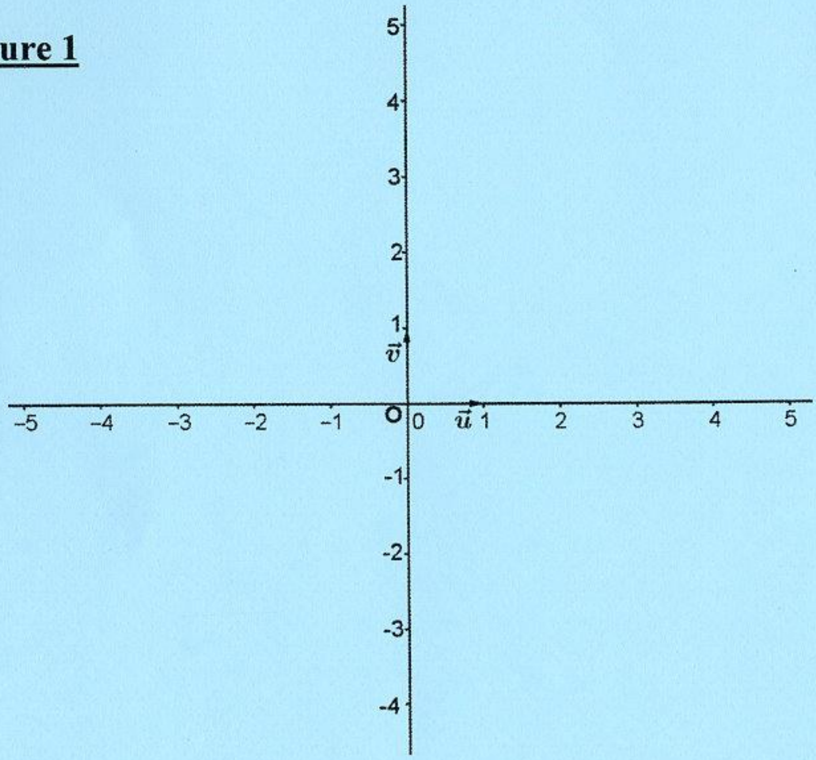

Figure 2