Epreuve : Mathématiques
Section : Sciences Expérimentales
Session principale 2022

-

Exercice 1 :

1) $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et (E) : $z^2 - \left(i + 2e^{i\theta}\right)z + e^{2i\theta} + ie^{i\theta} = 0$

On a : $a = 1$, $b = -\left(i + 2e^{i\theta}\right)$ et $c = e^{2i\theta} + ie^{i\theta}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(i + 2e^{i\theta}\right)^2 - 4\left(e^{2i\theta} + ie^{i\theta}\right) = -1 + 4e^{i\theta} + 4ie^{i\theta} - 4e^{2i\theta} - 4ie^{i\theta} = -1 = i^2 = \delta^2$

avec $\delta = i$ donc : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{i+2e^{i\theta}+i}{2} = i + e^{i\theta}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{i+2e^{i\theta}-i}{2} = e^{i\theta}$

d'où $S_{\mathbb{C}} = \left\{i + e^{i\theta}, e^{i\theta}\right\}$

2) $A(i)$, $B\left(i + e^{i\theta}\right)$ et $C\left(e^{i\theta}\right)$

a) $\frac{z_A - z_B}{z_B - z_C} = \frac{i-(i+e^{i\theta})}{(i+e^{i\theta})-e^{i\theta}} = \frac{-e^{i\theta}}{i} = ie^{i\theta}$

b) Les trois points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_B - z_C} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ie^{i\theta} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{i\theta} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}$.

Donc : $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$ car $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Méthode 1 :

On remarque que : $z_B - z_A = z_C$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ et comme A, B et C ne sont pas alignés alors : OABC est un parallélogramme.

On a aussi $OA = |i| = \left|e^{i\theta}\right| = OC$ donc OABC est un losange.

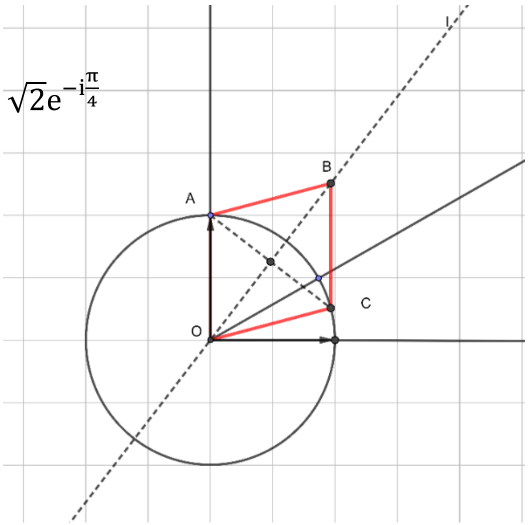
Méthode 2 :

On a : $|i| = \left|e^{i\theta}\right| = \left|ie^{i\theta}\right|$ donc $OA = OB = BC = OC$ donc OABC est un losange.

b) $1 + e^{2i\theta} = e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right) = e^{i\theta} \times 2\cos\theta = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$

c) $\mathcal{A}(\theta) = \frac{1}{2} \times OB \times AC = \frac{1}{2} \times \left|i + e^{i\theta}\right| \times \left|e^{i\theta} - i\right| = \frac{1}{2}\left|\left(i + e^{i\theta}\right)\left(e^{i\theta} - i\right)\right| = \frac{1}{2}\left|1 + e^{2i\theta}\right| = \frac{1}{2} \times 2\cos\theta$

Donc : $\mathcal{A}(\theta) = \cos\theta$



4) a) $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right)(1 - i) = \frac{\sqrt{2}}{4} \times 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) $\cos\frac{\pi}{12} = \mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right)(1 - i)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d) $\mathcal{A}(\theta) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow \mathcal{A}(\theta) = \cos\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12}$

Exercice 2 :

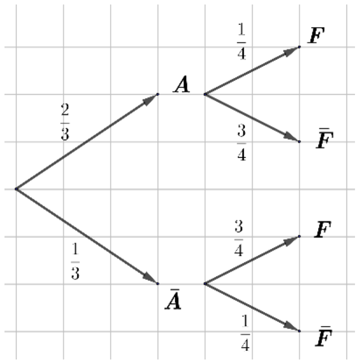
1) On a : $p(F) = \frac{5}{12}$ avec $F = (F \cap \overline{A}) \cup (F \cap A)$

Comme $p(F) = p(F \cap \overline{A}) + p(F \cap A)$

alors $p(F \cap \overline{A}) = p(F) - p(F \cap A) = \frac{5}{12} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

2) $p\left(F/_{\overline{A}}\right) = \frac{p(F\cap\overline{A})}{p(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

3)



4) $p\left(\overline{A}/_{\overline{F}}\right) = \frac{p(\overline{F}\cap\overline{A})}{p(\overline{F})} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}} = \frac{1}{7}$

Exercice 3 :

1) $n \geq 1$; $K_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$

a) $K_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

b) $K_{n+2} + K_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^n}{1+x^2}dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

c) Pour $n = 1$; on a : $K_3 + K_1 = \frac{1}{2}$ alors : $K_3 = \frac{1}{2} - K_1$ donc $K_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

d) Pour tout $x \in [0,1]$; $1 + x^2 \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ d'où $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$

On a pour tout $n \geq 1$ les fonctions $x \longmapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ et $x \longmapsto x^n$ sont continues sur $[0,1]$

Alors $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^n dx$ et par suite $0 \leq K_n \leq \frac{1}{n+1}$

e) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$

2) $n \geq 1$; $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$

a) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v'(x) = x^n \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v'(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$

Donc $I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}K_{n+2}$.

Par suite $I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}K_{n+2}$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\ln 2}{n+1} - \frac{2n}{n+1}K_{n+2} = \ln 2$

<u>Exercice 4 :</u>

A) 1) $x \in \mathbb{R}\,; u(x) = 1 + xe^x$

$u'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^x > 0$ alors $u'(x)$ et $(1+x)$ ont le même signe

Donc $u'(x) \leq 0 \iff 1 + x \leq 0 \iff x \leq -1$ donc u est strictement décroissante sur $]-\infty\,,-1]$

Et $u'(x) \geq 0 \iff 1 + x \geq 0 \iff x \geq -1$ donc u est strictement croissante sur $[-1\,,+\infty[$

2) u admet en (- 1) un minimum absolu égale à $(1 - e^{-1}) > 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$

B) $x \in \mathbb{R}\,; f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-x + \ln(1 + xe^x)\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 + xe^x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1 + xe^x) = \ln(1) = 0$

Donc la droite Δ: $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe (ζ) au voisinage de $-\infty$

c) On a : $f(x) + x = \ln(1 + xe^x)$.

La courbe (ζ) est dessus de Δ pour $x \geq 0$.

La courbe (ζ) est dessous de Δ pour $x \leq 0$.

2) a) $f(x) = -x + \ln[e^x(e^{-x} + x)] = -x + \ln e^x + \ln(e^{-x} + x) = -x + x + \ln(e^{-x} + x) = \ln(e^{-x} + x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{-x} + x) = +\infty$ car : $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-x} + x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{-x}+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x\left(\frac{e^{-x}}{x}+1\right)\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln x}{x} + \ln\left(\frac{1}{xe^x} + 1\right)\right] = 0$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{xe^x} + 1\right) = 1$

Donc la courbe (ζ) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{i}\right)$ au $V(+\infty)$

3) a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \ln(e^{-x} + x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{-e^{-x}+1}{e^{-x}+x} = \frac{(-e^{-x}+1)\times e^x}{(e^{-x}+x)\times e^x} = \frac{e^x-1}{1+xe^x}$

b) On sait d'après A) que : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 + xe^x > 0$

Donc $f'(x)$ et $e^x - 1$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$

$f'(x) \geq 0 \iff e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$

$f'(x) \leq 0 \iff e^x - 1 \leq 0 \iff e^x \leq 1 \iff x \leq 0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) $h(x) = x + 2 - e^x$

- La fonction h est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $h(]-\infty, -1]) =]-\infty, 1]$.

  Comme $0 \in]-\infty, 1]$ alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty, 0]$
- La fonction h est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $h([0, +\infty[) =]-\infty, 1]$.

  Comme $0 \in]-\infty, 1]$ alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [0, +\infty[$.

Conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β

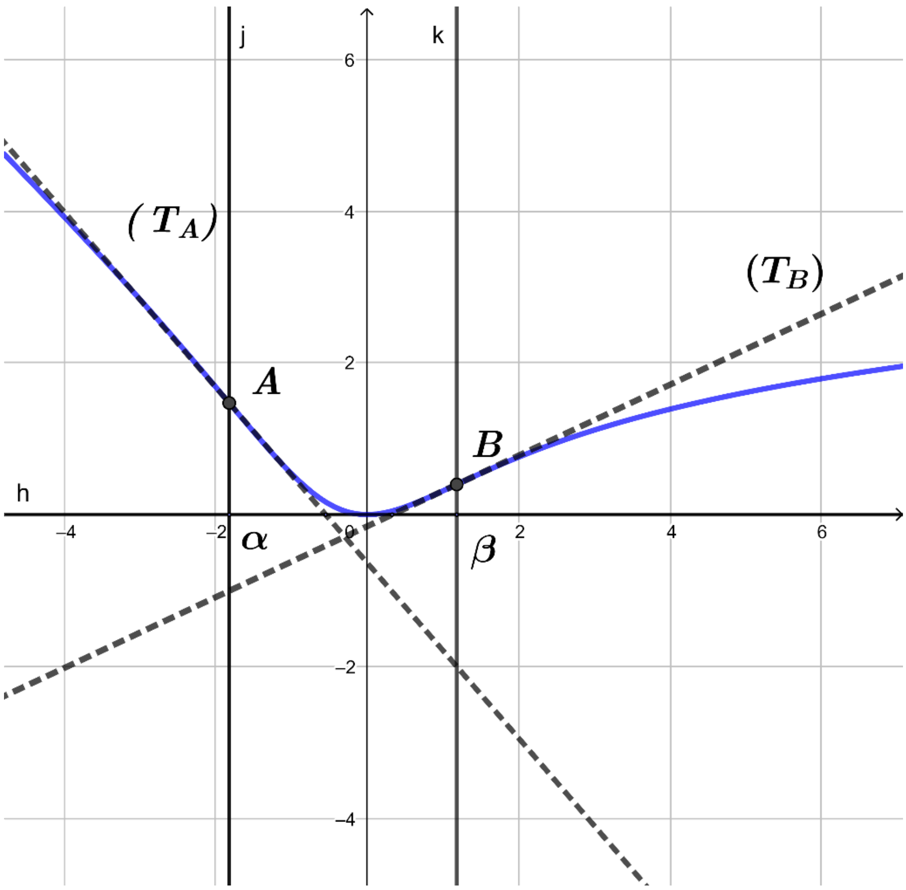
b) $f''(x) = \frac{e^x(1+xe^x)-e^x(e^x-1)(x+1)}{(1+xe^x)^2} = \frac{e^x+xe^{2x}-xe^{2x}-e^{2x}+xe^x+e^x}{(1+xe^x)^2} = \frac{e^x(2+x-e^x)}{(1+xe^x)^2} = \frac{h(x)e^x}{(1+xe^x)^2}$

c) On sait que : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\frac{e^x}{(1+xe^x)^2} > 0$ donc $f''(x)$ et $h(x)$ ont le même signe.

Donc $f''(x)$ s'annule et change de signe également en α et β

Donc les deux points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(\beta, f(\beta))$ sont deux points d'inflexions de (C)

5)



6) a) $\lambda > 1$; $A_\lambda = \int_1^\lambda f(x)dx$

On a : pour tout $x \in [1,+\infty[$; $f(x) = \ln(x + e^{-x})$

Donc : $f(x) - \ln x = \ln(x + e^{-x}) - \ln x = \ln\frac{x+e^{-x}}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right)$

- D'une part $1 + \frac{1}{xe^x} > 1$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right) > 0$ donc $f(x) - \ln x > 0$, par suite $f(x) \geq \ln x$
- D'autre part $x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e$, donc $xe^x \geq e \Leftrightarrow \frac{1}{xe^x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{xe^x} \leq 1 + \frac{1}{e}$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right).$$

Par suite $f(x) \leq \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$

Conclusion : Pour tout $x \in [1,+\infty[$; $\ln x \leq f(x) \leq \ln x + \ln(1 + e^{-1})$

b) Les fonctions : $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$ sont continues sur $[1,\lambda]$ alors :

$$\int_1^\lambda \ln x\, dx \leq \int_1^\lambda f(x)dx \leq \int_1^\lambda \ln x + \ln(1 + e^{-1})dx$$

donc $\int_1^\lambda \ln x\, dx \leq A_\lambda \leq \int_1^\lambda \ln x + \ln(1 + e^{-1})dx$

On a : $\int_1^\lambda \ln x\, dx = [x\ln x - x]_1^\lambda = \lambda\ln\lambda - \lambda + 1$

$$\int_1^\lambda \ln x + \ln(1 + e^{-1})dx = [x\ln x - x + x\ln(1 + e^{-1})]_1^\lambda$$

$$= \lambda\ln\lambda - \lambda\left(-1 + \ln(1 + e^{-1})\right) + 1 - \ln(1 + e^{-1})$$

Donc pour tout $\lambda > 1$; $\lambda\ln\lambda - \lambda + 1 \leq A_\lambda \leq \lambda\ln\lambda - \lambda\left(-1 + \ln(1 + e^{-1})\right) + 1 - \ln(1 + e^{-1})$

On a : pour tout $\lambda > 1$; $A_\lambda \geq \lambda\ln\lambda - \lambda + 1$ et $\lim_{\lambda\to+\infty}$; $\lambda\ln\lambda - \lambda + 1 = +\infty$ donc

- $\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = +\infty$
- $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{A_\lambda}{\lambda\ln\lambda} = 1$, car $1 - \frac{1}{\ln\lambda} + \frac{1}{\lambda\ln\lambda} \leq \frac{A_\lambda}{\lambda\ln\lambda} \leq 1 - \frac{1}{\ln\lambda}\left(-1 + \ln(1 + e^{-1})\right) + \frac{1-\ln\left(1+e^{-1}\right)}{\lambda\ln\lambda}$