MATHÉMATIQUES
Section : Mathématiques
Session principale 2022

Exercice 1 :

$\theta \in]0, \pi[$ et (E): $z^2 - 2e^{i\theta}z + \left(e^{2i\theta} - 4\right) = 0$.

1) $\Delta = 4e^{2i\theta} - 4\left(e^{2i\theta} - 4\right) = 16$

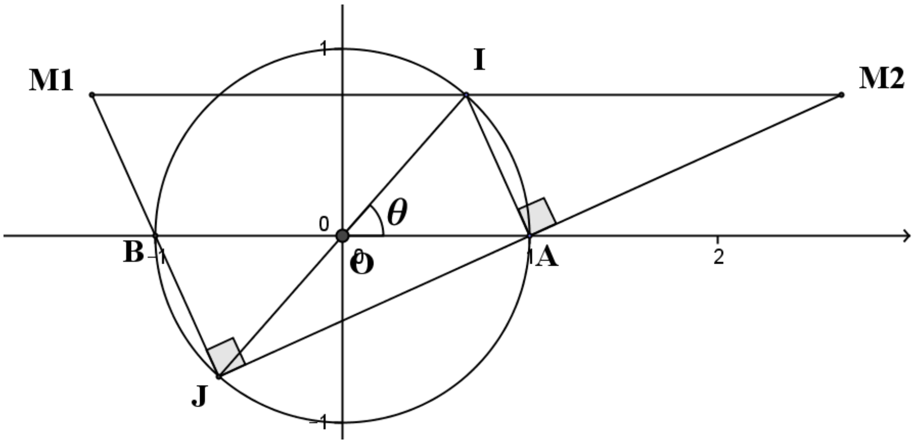
$z_1 = -2 + e^{i\theta}$ et $z_2 = 2 + e^{i\theta}$

$S_C = \{z_1;\ z_2\}$.

2) a) On a : $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{2e^{i\theta}}{2} = e^{i\theta} = z_I$. Donc I est le milieu de $[M_1M_2]$.

b) On a : $\text{aff}\left(\overrightarrow{IM_1}\right) = z_1 - z_I = -2$ et $\text{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A = -2$. Donc $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$.

c) On a : $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(I) = M_1$ et $S_I(M_1) = M_2$.



3) a) On a : $\dfrac{z_2 - z_J}{z_A - z_J} = \dfrac{2 + e^{i\theta} + e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = 2 \in IR$ donc $J \in (AM_2)$.

On a : $\dfrac{z_1 - z_J}{z_B - z_J} = \dfrac{-2 + e^{i\theta} + e^{i\theta}}{-1 + e^{i\theta}} = 2 \in IR$ donc $J \in (BM_1)$.

On a : $Im(z_1) = \sin\theta \neq 0$ car $\theta \in]0, \pi[$, alors $M_1 \notin (AB)$ et par suite (AM_2) et (BM_1) sont sécantes.

Conclusion : (AM_2) et (BM_1) se coupent au point J.

b) $$\frac{z_1 - z_J}{z_2 - z_J} = \frac{-1 + e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = i\,tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \in iIR$$ donc $(JM_1) \perp (JM_2)$

$$\text{Aire}(JM_1M_2) = \frac{JM_1 \times JM_2}{2} = 4\sin\theta$$

$\text{Aire}(JM_1M_2)$ est maximale si et seulement si $\sin\theta$ est maximale avec $\theta \in]0, \pi[$.

Par suite $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 :

1) Soit $R = r_{(B,-\frac{\pi}{3})}$.

a) On a : $\left(\overrightarrow{BC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BO}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BO}\right) \equiv -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

b) On a : $\left(\overrightarrow{BC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BD}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{BO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{BO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv 0[2\pi]$$

Par suite les points O, D et B sont alignés.

c) On a le triangle BCD est isocèle et R(C) = D donc BCD est équilatéral, d'où CB = CD.
D'autre part le triangle BCA est isocèle en C, d'où CB = CA et par suite CA = CD.

On a : $\left(\overrightarrow{CD}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CA}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Conclusion : Le triangle ACD est isocèle et rectangle en C.

2) Soit f la similitude directe telle que f(B) = A et f(O) = C.

a) On a OAB est un triangle direct isocèle et rectangle en O et f est une similitude directe donc Cf(A)A est un triangle direct isocèle et rectangle en C et comme CDA est triangle direct isocèle et rectangle en C alors f(A) = D.

b) Soit θ une mesure de l'angle de f.
On a : f(A) = D et f(B) = A donc

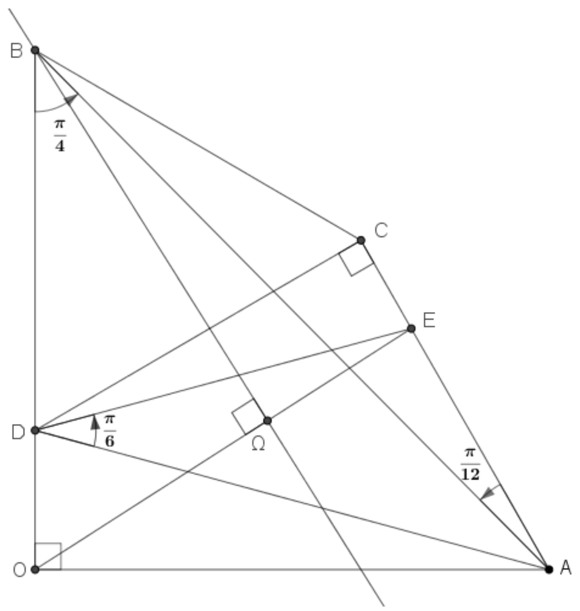
$$\theta \equiv \left(\overrightarrow{BO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)[2\pi] \equiv \left(\overrightarrow{BO}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AC}\right) + \pi[2\pi].$$

Par suite $\theta \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} + \pi[2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi] \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

c) On a : f(D) = E et D∈(BO) donc f(D)∈f((BO)) par suite E∈(AC).

d) On a : f(D) = E et f(A) = D donc $\left(\overrightarrow{DA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ED}\right) \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$ par suite

$$\left(\overrightarrow{DA}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{DE}\right) \equiv -\frac{5\pi}{6} + \pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$



e) On a : fofof(B) = fof(A) = f(D) = E et fofof est la similitude directe de centre Ω et d'angle $3\times(-\frac{5\pi}{6}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) OA = OB et le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

a) On a : $\arg(z_C) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)[2\pi]$

On a : CA = CB et OA = OB donc (OC) = med([AB]) et comme OAB est un triangle isocèle et rectangle en O alors [OC) est la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et par suite on a :
$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)[2\pi] \equiv \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. d'où $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$..

b) On a : f(B) = A alors $z_A = az_B + b$ avec $z_A = 1$ et $z_B = i$ d'où (ai + b) = 1.
On a : f(O) = C alors $z_C = az_O + b$ avec $z_O = 0$ d'où $z_C = b$.

c) ∗ Comme f(O) = C ≠ O alors Ω ≠ O par suite $z_\Omega \neq 0$.

∗ Ω est le centre de f donc $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ par suite $\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{\frac{b}{1-a} - i}{\frac{b}{1-a}} = \frac{-i+(b+ia)}{b} = \frac{1-i}{b}$.

∗ $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{1-i}{b}\right)[2\pi] \equiv \arg(1-i) - \arg(b)[2\pi]$.

Comme $\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg(b) \equiv \arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

4) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc Ω∈(OE) et (ΩB)⊥(ΩE) par suite le point Ω est le projeté orthogonale de B sur la droite (OE).

Exercice 3 :

Partie A

(E) : 19u + 11v = 1

1) a) On a : 19×(-4) + 11×7 = – 76 + 77 = 1 donc (– 4, 7) est une solution de l'équation (E).

b) On a : 19u + 11v = 19×(–4) + 11×7 sig 19×(u + 4) = 11×(– v + 7)
On a : 11 divise 19×(u + 4) et 19 ∧ 11 = 1 donc 11 divise (u + 4)
Alors il existe k∈Z tel que u + 4 = 11k sig u = – 4 + 11k
On a : 19×(u + 4) = 11×(– v + 7) sig 19×11k = 11×(– v + 7) sig v = 7 – 19k
Vérification : 19×(– 4 + 11k) + 11×(7 – 19k) = – 76 + 77 = 1.
Conclusion : S_{ZxZ} = {(– 4 + 11k, 7 – 19k), k∈Z}.

2) a) On a : 19 ∧ 11 = 1 donc l'équation $19u \equiv 1(\text{mod}\,11)$ admet une unique solution u∈{1, 2, ….,10}.
Comme on a : 19×7 = 133 = 11×12 + 1 alors u = 7 est cette unique solution.

b) On a : 19 ∧ 11 = 1 donc l'équation $11v \equiv 1(\text{mod}\,19)$ admet une unique solution v∈{1, 2, ….,18}.
Comme on a : 11×7 = 77 = 19×4 + 1 alors v = 7 est cette unique solution.

Soit l'équation $(E_{209}) : x^2 \equiv x(\text{mod}\,209)$.

Partie B

1) On a : $0^2 \equiv 0(\text{mod}\,209)$ et $1^2 \equiv 1(\text{mod}\,209)$ donc 0 et 1 sont solutions de l'équation (E_{209}).

2) 209 = 11×19.

3) $133^2 = 84\times209 + 133$ donc $133^2 \equiv 133\,(\text{mod } 209)$ par suite 133 est solution de l'équation (E_{209}).

$77^2 = 28\times209 + 77$ donc $77^2 \equiv 77\,(\text{mod } 209)$ par suite 77 est solution de l'équation (E_{209}).

4) a) $x^2 \equiv x\,(\text{mod } 209)$ sig $x(x-1) \equiv 0\,(\text{mod } 209)$ sig 209 divise x(x – 1)

On a : 19 divise 209 et 209 divise x(x – 1) donc 19 divise x(x – 1)
On a : 11 divise 209 et 209 divise x(x – 1) donc 11 divise x(x – 1)

b) On suppose que $x \wedge (x-1) = d$

On a : d divise x et d divise (x – 1) donc d divise x – (x – 1) = 1, par suite d = 1.

5) Soit $x \in \{2, 3, \ldots\ldots, 208\}$ une solution de (E_{209}).

a) On suppose que 19 ne divise pas x et 11 ne divise pas x alors 19 divise (x – 1) et 11 divise (x – 1) donc $19\times11 = 209$ divise (x – 1) ce qui est absurde car (x – 1) < 209.
Conclusion : 19 divise x ou 11 divise x.

b) On suppose que x = 19k cela signifie que 19 divise x donc 11 divise (x – 1) (car si non 11 divise x ce qui est absurde).
On a : $x \in \{2, 3, \ldots\ldots, 208\}$ et x = 19k donc $k \in \{1, 2, \ldots\ldots, 10\}$
On a : $(x-1) \equiv 0\,(\text{mod } 11)$ sig $19k \equiv 1\,(\text{mod } 11)$ d'après Partie A 2) b) k = 7 donc $x = 19\times7 = 133$

c) On suppose que x = 11p cela signifie que 11 divise x donc 19 divise (x – 1) (car sinon 19 divise x ce qui est absurde).
On a : $x \in \{2, 3, \ldots\ldots, 208\}$ et x = 11p donc $p \in \{1, 2, \ldots\ldots, 18\}$
On a : $(x-1) \equiv 0\,(\text{mod } 19)$ sig $11p \equiv 1\,(\text{mod } 19)$ d'après Partie A 2) b) p = 7 donc $x = 11\times7 = 77$

6) Si x est solution de (E_{209}) et $x \in \{2, 3, \ldots\ldots, 208\}$ alors x = 77 ou x = 133 et on a : 0, 1, 77 et 133 sont des solutions de (E_{209}).
Par suite les solutions de (E_{209}) appartenant à $\{0, 1, 2, \ldots\ldots, 208\}$ sont 0, 1, 77 et 133.

Partie C

1) On a : $y \equiv x\,(\text{mod } 209)$ donc $y^2 \equiv x^2\,(\text{mod } 209)$ par suite $y^2 - y \equiv x^2 - x\,(\text{mod } 209)$

x solution de (E_{209}) ssi $x^2 - x \equiv 0\,(\text{mod } 209)$ ssi $y^2 - y \equiv 0\,(\text{mod } 209)$ ssi y solution de (E_{209}).

2) Soit $y \in \mathbb{Z}$ une solution de (E_{209}) et soit x tel que $y \equiv x\,(\text{mod } 209)$

Alors y = x + 209k avec $x \in \{0, 1, 77, 133\}$
Par suite $S_{\mathbb{Z}} = \{209k, 1 + 209k, 77 + 209k, 133 + 209k$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4 :

Partie A

1) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$; $x \in]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, donc la droite y = 0 est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de +∞.

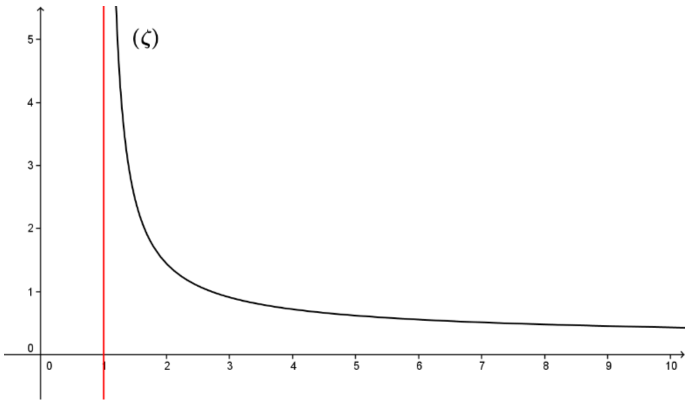
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$, donc la droite x = 0 est une asymptote à la courbe (ζ).

2) a) La fonction f est dérivable sur]1, +∞[et on a : $f^{'}(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = -\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.

b) On a : $f^{'}(x) = -\dfrac{1}{x\ln^2 x} < 0$ pour tout x∈]1, +∞[.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

c) Courbe



3) Soit g la fonction définie sur]1, +∞[par g(x) = f(x) – x.

La fonction g est dérivable sur]1, +∞[et on a : $g^{'}(x) = f^{'}(x) - 1 < 0$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur]1, +∞[donc elle réalise une bijection de]1, +∞[sur g(]1, +∞[) =]-∞, +∞[= IR.

Comme 0∈IR alors il existe un unique α∈]1, +∞[tel que g(α) = 0.

On a : g(e) = 1 – e < 0 = g(α) et g est strictement décroissante alors α < e.

Conclusion : L'équation f(x) = x admet dans]1, +∞[une unique solution α et α < e.

Partie B

1) a) On a : ∗ x → lnx est dérivable sur]1, +∞[

∗ $t \to \dfrac{e^t}{t^n}$ est continue sur]0, +∞[

∗ ln(]1, +∞[) =]0, +∞[et lnα ∈]0, +∞[

Donc la fonction H est dérivable sur]1, +∞[et pour tout x > 1 on a

$$H^{'}(x) = \frac{1}{x}\times\frac{e^{\ln x}}{\ln^n x} = \frac{1}{x}\times\frac{x}{\ln^n x} = \frac{1}{\ln^n x}.$$

b) La fonction $t \to (f(t))^n$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\alpha \in]1, +\infty[$ donc la fonction F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a : $F'(x) = (f(t))^n = \dfrac{1}{\ln^n x} = H'(x)$.

Il existe une constante c tel que pour tout $x > 1$ on a : $H(x) = F(x) + c$.

On a : $H(\alpha) = F(\alpha) = 0$ donc $c = 0$ et par suite $H(x) = F(x)$ pour tout $x > 1$

2) $U_n = \int_\alpha^e \big(f(t)\big)^n dt, \quad n \in \mathbb{N}^*$

a) Pour tout $n \geq 1$, $U_n = F(e) = H(e) = \displaystyle\int_{\ln\alpha}^{\ln e} \frac{e^t}{t^n}\,dt = \int_{\ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n}\,dt$.

b) Soit $n \geq 2$, On a : $1 < \alpha < e$ donc $\ln\alpha < 1$

$\ln\alpha \leq t \leq 1$ alors $\alpha \leq e^t \leq e$ alors $\dfrac{\alpha}{t^n} \leq \dfrac{e^t}{t^n} \leq \dfrac{e}{t^n}$ car $t^n > 0$.

Les fonctions $t \to \dfrac{\alpha}{t^n}$, $t \to \dfrac{e^t}{t^n}$ et $t \to \dfrac{e}{t^n}$ sont continues sur $[\ln\alpha, 1]$ donc on a :

$$\alpha\int_{\ln\alpha}^{1} \frac{1}{t^n}\,dt \leq \int_{\ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n}\,dt \leq e\int_{\ln\alpha}^{1} \frac{1}{t^n}\,dt \text{ donc } \alpha\left[\frac{-1}{n-1}\times\frac{1}{t^{n-1}}\right]_{\ln\alpha}^{1} \leq U_n \leq e\left[\frac{-1}{n-1}\times\frac{1}{t^{n-1}}\right]_{\ln\alpha}^{1}$$

Par suite $\dfrac{\alpha}{n-1}(\alpha^{n-1}-1) \leq U_n \leq \dfrac{e}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\alpha^n}{n} = \dfrac{e^{n\ln\alpha}}{n\ln\alpha}\ln\alpha$

Comme $\ln\alpha > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n} = +\infty$

Pour tout $n \geq 2$, $U_n \geq \dfrac{\alpha}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n-1}(\alpha^{n-1}-1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n-\alpha}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n}\times\dfrac{1-\frac{1}{\alpha^{n-1}}}{1-\frac{1}{n}} = +\infty$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

d) Pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{1-\frac{1}{\alpha^{n-1}}}{n-1} \leq \dfrac{U_n}{\alpha^n} \leq \dfrac{e}{n-1}\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha^n}\right)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{\alpha^{n-1}}}{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n-1}\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha^n}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{\alpha^n} = 0$.

3) Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-2)U_k$, $n \geq 1$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \displaystyle\int_{\ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n}\,dt$.

On pose : $\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{t^n} \\ v'(t) = e^t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = -\dfrac{n}{t^{n+1}} \\ v(t) = e^t \end{cases}$

Par suite $U_n = \left[\dfrac{e^t}{t^n}\right]_{\ln\alpha}^{1} + n\displaystyle\int_{\ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^{n+1}}\,dt = e - \frac{\alpha}{\ln^n\alpha} + nU_{n+1} = e - \alpha^{n+1} + nU_{n+1}$ car $\alpha = \dfrac{1}{\ln\alpha}$

b) $*$ Pour n = 1 on a : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1}(k-2)U_k = (1-2)U_1 = -U_1$ et $\dfrac{\alpha^2-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-1)e - U_1 = -U_1$

Donc la propriété est vraie pour n = 1.

∗ Soit $n \in IN^*$.

On suppose que $S_n = \dfrac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1}+(1-n)e-U_n$ et montrons que $S_{n+1} = \dfrac{\alpha^{n+2}-\alpha^2}{\alpha-1}-ne-U_{n+1}$.

On a : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(k-2)U_k = \sum_{k=1}^{n}(k-2)U_k + (n-1)U_{n+1} = S_n + (n-1)U_{n+1}$

$$S_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1}+(1-n)e-U_n+(n-1)U_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1}+(1-n)e-e+\alpha^{n+1}-nU_{n+1}+(n-1)U_{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1}-ne+\frac{\alpha^{n+1}(\alpha-1)}{\alpha-1}-U_{n+1} = \frac{\alpha^{n+2}-\alpha^2}{\alpha-1}-ne-U_{n+1}$$

Conclusion : Pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \dfrac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1}+(1-n)e-U_n$

c) Pour tout $n \in IN^*$ on a : $\dfrac{S_n}{\alpha^n} = \dfrac{\alpha-\dfrac{1}{\alpha^{n-2}}}{\alpha-1}+\dfrac{n}{\alpha^n}\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)e-\dfrac{U_n}{\alpha^n}$

On a : $\alpha > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha^{n-2}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\alpha^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_n}{\alpha^n} = 0$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{\alpha^n} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.