RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	**Session principale**
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription

✎✎✎✎✎

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

✎Exercice 1 (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta} z + \left(e^{2i\theta} - 4\right) = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E). z_1 est tel que $\Re e\left(z_1\right) < 0$.

2) On considère les points A, B, I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, -1, $e^{i\theta}$, z_1 et z_2.

a) Montrer que I est le milieu du segment $\left[M_1 M_2\right]$.

b) Vérifier que $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$.

c) Dans la **figure 1** de l'annexe jointe, on a placé dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et I.

Construire les points M_1 et M_2.

3) a) Montrer que les droites $\left(AM_2\right)$ et $\left(BM_1\right)$ se coupent au point J d'affixe $\left(-e^{i\theta}\right)$.

b) Déterminer la valeur du réel θ telle que l'aire du triangle JM_1M_2 soit maximale.

✎Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la **figure 2** de l'annexe jointe,

- OAB est un triangle rectangle et isocèle en O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- CBA est un triangle isocèle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$.

1) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

a) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

b) On note $D = R(C)$. Justifier que les points O, D et B sont alignés et construire le point D.

c) Montrer que le triangle ACD est rectangle et isocèle en C.

2) Soit f la similitude directe telle que $f(B) = A$ et $f(O) = C$.

a) Montrer que $f(A) = D$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de f est $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

c) Soit $E = f(D)$. Vérifier que le point E est un point de la droite (AC).

d) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ puis construire le point E.

e) Soit Ω le centre de f. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

3) On suppose $OA = OB = 1$ et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

a) On note z_C l'affixe du point C. Montrer que $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

b) Soit $z' = az + b$ l'expression complexe de f où a et b sont deux nombres complexes.

Montrer que $ai + b = 1$ et que $z_C = b$.

c) On note z_Ω l'affixe de Ω. Vérifier que $z_\Omega \neq 0$ et montrer que $\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{1-i}{b}$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

4) Montrer que le point Ω est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OE) et le construire.

✎**<u>Exercice 3</u> (5,5 points)**

Partie A

Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 19u + 11v = 1$.

1)a) Vérifier que $(-4, 7)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2)a) Montrer que $u = 7$ est l'unique entier appartenant à $\{1, 2, ..., 10\}$

tel que $19u \equiv 1 \pmod{11}$.

b) Montrer de même que $v = 7$ est l'unique entier appartenant à $\{1, 2, ..., 18\}$

tel que $11v \equiv 1 \pmod{19}$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_{209}) : x^2 \equiv x \pmod{209}$.

Partie B

1) Vérifier que les entiers 0 et 1 sont des solutions de (E_{209}).

2) Décomposer 209 en produit de facteurs premiers.

3) Montrer que 133 et 77 sont des solutions de (E_{209}).

4) Soit x une solution de (E_{209}).

a) Montrer que 19 divise $x(x-1)$ et 11 divise $x(x-1)$.

b) Vérifier que x et $(x-1)$ sont premiers entre eux.

5) Soit x une solution de (E_{209}) appartenant à $\{2,3....,208\}$.

a) Montrer que 19 divise x ou 11 divise x.

b) On suppose que $x=19k$ où k est un entier.

Montrer que 11 divise $(x-1)$ puis déduire que $x=133$.

c) On suppose que 11 divise x. Montrer que $x = 77$.

6) Déterminer les solutions de (E_{209}) appartenant à $\{0,1,...,208\}$.

Partie C

Soit y un entier et x son reste modulo 209.

1) Montrer que y est une solution de (E_{209}) si et seulement si x est une solution de (E_{209}).

2) Donner alors les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_{209}).

✎**Exercice 4** **(6,5 points)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

2)a) Montrer pour tout $x>1$, $f'(x)=\dfrac{-1}{x\ln^2 x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer (C).

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ possède sur $]1,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha<e$.

Partie B

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x > 1$, on pose $F(x) = \int_{\alpha}^{x} \left(f(t)\right)^n \, dt$ et $H(x) = \int_{\ln\alpha}^{\ln x} \frac{e^t}{t^n} \, dt$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x > 1$, $H(x) = F(x)$.

2) On pose pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = \int_{\alpha}^{e} \left(f(t)\right)^n \, dt$.

a)Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $U_n = \int_{\ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n} \, dt$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\frac{\alpha^n - \alpha}{n-1} \leq U_n \leq \frac{e}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - 1\right)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha^n}{n} = +\infty$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{\alpha^n}$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left(k-2\right) U_k$.

a) En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n = e - \alpha^{n+1} + n\,U_{n+1}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-n)e - U_n$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\alpha^n}$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

✂ -

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques

Session principale (2022)

Annexe à rendre avec la copie

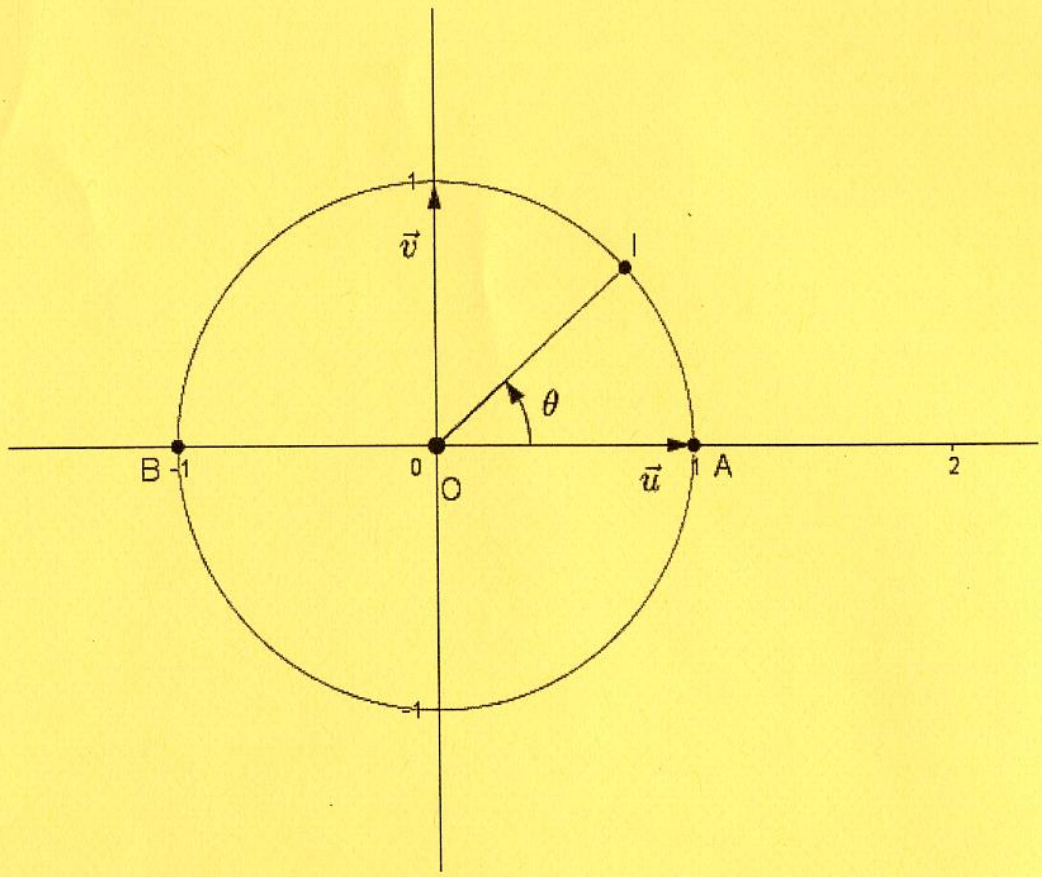

Figure 1

Ne rien écrire ici

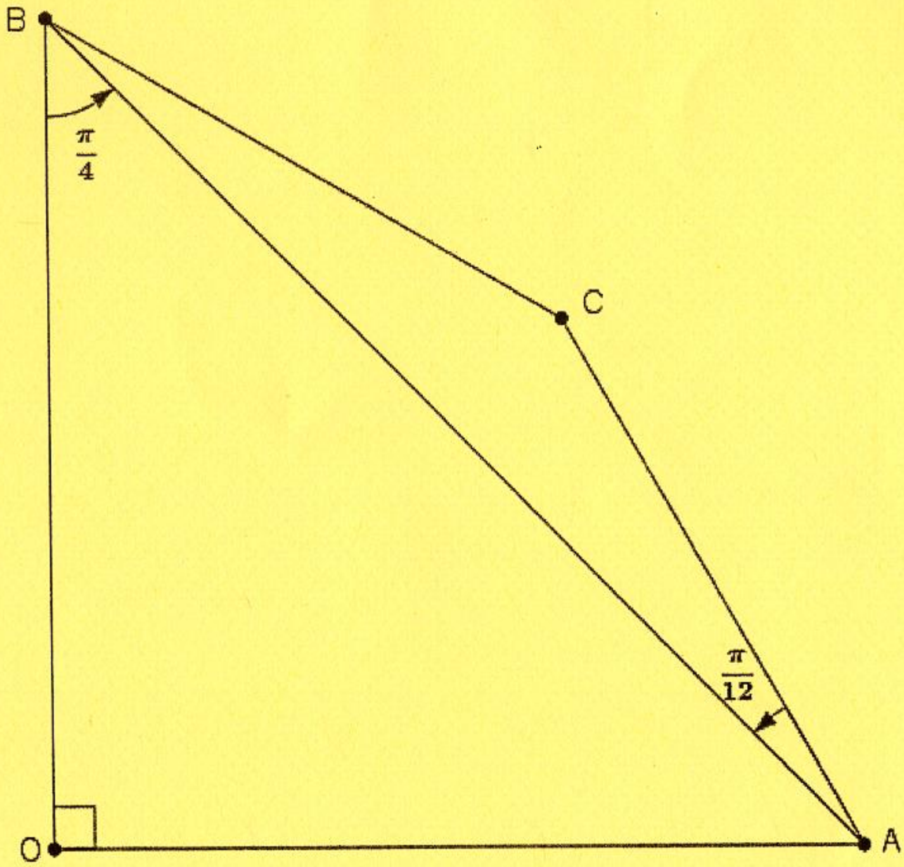

Figure 2