Epreuve : Mathématiques

Section : Sciences Expérimentales

Session de Contrôle 2022

Exercice 1 :

1) $r = 0{,}97$. Il y a une forte corrélation linéaire positive entre les deux variables I et P.

2) L'équation de la droite de régression de P en I est : $P = 51{,}38 \times I + 911{,}8$

3) **a)** Le rang de l'année 2023 est $I = 16$.

Donc la production en 2023 est $P = 1733{,}88$ (en millions de litres)

b) $P \geq 1800 \iff 51{,}38 \times I + 911{,}8 \geq 1800 \iff I \geq 17{,}28$

Sachant que l'année de rang 18 est 2025.

Donc à partir de 2025, la production du lait dépassera 1800 (en millions de litres)

c) Sachant que l'année 2024 est de rang I = 17,

D'une part, la production en 2024 est $P = 51{,}38 \times 17 + 941{,}8 = 1785{,}26$ (en millions de litres)

D'autre part, le moyen de consommation de la Tunisie en 2024 est

$12{,}5 \times 135 = 1687{,}5$ (en millions de litres).

On a : $1687{,}5 < 1785{,}26$ donc la production du lait cru répondra au besoin de la Tunisie en 2024.

Exercice 2 :

Urne contient (4 R et 6 N). On tire simultanément trois boules de l'urne.

1) A « Obtenir une seule boule rouge » : $p(A) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4\times15}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

2) B « Obtenir aucune boule rouge » : $p(B) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

3) **a)** X suit une loi binomiale de paramètre $\left(n\,;\frac{1}{2}\right)$

Donc la loi de probabilité de X est donnée par :

$p(X = k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $0 \leq k \leq n$ (avec k est le nombre de succès)

b) $E(X) = \frac{1}{2}\,n$ et $V(X) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times n = \frac{n}{4}$

Exercice 3 :

1) (E) : $z^2 - 2(1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}z + 4ie^{i\frac{\pi}{3}} = 0$

a) $\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 - 2(1+i)e^{i\frac{\pi}{6}} \times \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right) + 4ie^{i\frac{\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{6}\times 2} - 4(1+i)e^{i\frac{\pi}{6}\times 2} + 4ie^{i\frac{\pi}{3}}$

$$= 4e^{i\frac{\pi}{3}} - 4(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}} + 4ie^{i\frac{\pi}{3}} = 0$$

Donc, $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de l'équation (E).

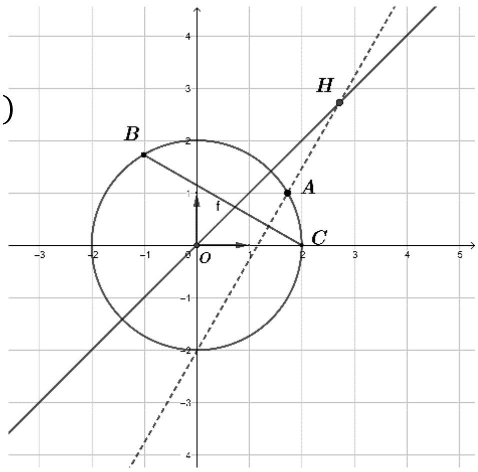
b) Soient $a = 1$, $b = -2(1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $c = 4ie^{i\frac{\pi}{3}}$

L'autre solution de (E) est $z' = \frac{4ie^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2i\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = 2i\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (car $z' \times z'' = \frac{c}{a}$)

2) $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$. On donne H tel que $z_H = z_A + z_B + z_C$

a) $OA = |z_A| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ donc $A \in C(O, 2)$

$OB = |z_B| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ donc $B \in C(O, 2)$



b) $A \in \zeta_{(O,2)} \cap \{M(x,y) \text{ tel que } y = 1 \text{ et } x > 0\}$

$B \in \zeta_{(O,2)} \cap \{M(x,y) \text{ tel que } x = -1 \text{ et } y > 0\}$

3) a) $\frac{z_B+z_C}{z_C-z_B} = \frac{-1+i\sqrt{3}+2}{2-(-1+i\sqrt{3})} = \frac{1+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})} = \frac{1}{-i\sqrt{3}} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\text{aff}(\overrightarrow{AH})}{\text{aff}(\overrightarrow{BC})} = \frac{z_H - z_A}{z_C - z_B} = \frac{z_B + z_C}{z_C - z_B} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ est imaginaire pure .

Donc (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

c) $z_H = z_A + z_B + z_C = \sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})(1+i) = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}}$

d) Construction : d'une part, on sait que (AH) et (BC) sont perpendiculaires

d'autre part $\arg(z_H) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Donc H est le point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) et passant par A et de la droite y = x.

Exercice 4 :

$x \in]0, +\infty[$; $f(x) = x\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x$

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln^2 x = +\infty$

La droite $x = 0$ est une asymptote verticale à (ζ)

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln^2 x\left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln^2 x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{\ln^2 x}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\left(1-\frac{\ln x}{2x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

donc la courbe (ζ) admet une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au $V(+\infty)$

2) **a)** Soit $x\in]0,+\infty[$; $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{x}\ln x=\ln x+1-\frac{\ln x}{x}=1+\frac{(x-1)\ln x}{x}$

b) Soit $x\in]0,+\infty[$;

- Si $x\geq1$ alors : $x-1\geq0$ et $\ln x\geq0$ donc : $(x-1)\ln x\geq0$
- Si $0<x\leq1$ alors $x-1\leq0$ et $\ln x\leq0$ donc : $(x-1)\ln x\geq0$

Par suite pour tout $x\in]0,+\infty[$; $(x-1)\ln x\geq0$

c) Tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$

On a : $f'(1)=1$ et $f(1)=0$ alors $(T):y=x-1$

4) $x\in]0,+\infty[$; $g(x)=f(x)-x+1$

a) $g(1)=f(1)-1+1=0$

Comme g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, alors :

Pour tout $x\geq1$; $g(x)\geq0$ et pour tout $0<x\leq1$; $g(x)\leq0$

b) On a : pour tout $x\in]0,+\infty[$; $g(x)=f(x)-(x-1)$ et on sait que $(T):y=x-1$

Donc pour tout $x\geq1$; (ζ) est au-dessus de sa tangente (T)

pour tout $0<x\leq1$; (ζ) est au-dessous de sa tangente (T)

Donc la tangente (T) au point $A(0,1)$ traverse la courbe (ζ)

Par suite A est un point d'inflexion de la courbe (ζ)

c) La fonction g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de

$]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[)$ et comme g est continue sur $]0,+\infty[$ alors $g(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$

Sachant que $1\in\mathbb{R}$ alors l'équation $g(x)=1$ admet une unique solution $\alpha\in]0,+\infty[$

Or : $g(3{,}3)=0{,}92<1$ et $g(3{,}4)=1{,}01>1$ donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires :

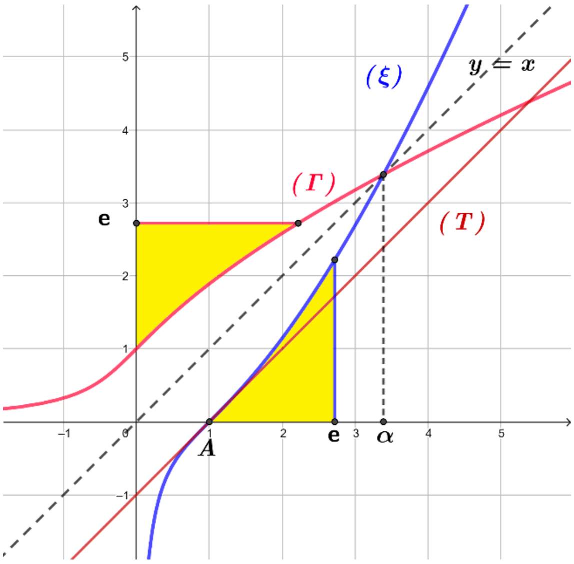
$\alpha\in]3{,}3\,;3{,}4[$

5) $\Delta: y=x$

a) $f(x)=x\iff f(x)-x=0\iff g(x)=1\iff x=\alpha$.

donc la droite Δ coupe (ζ) au point d'abscisse α

b)



6) **a)** La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur f $(]0,+\infty[)$ et comme f est continue sur $]0,+\infty[$ alors f $(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$ alors f est une bijection de $]0,+\infty[$ su $\mathbb{R}$.

b) La courbe (Γ) de f^{-1} est la symétrique de (ζ) par rapport à Δ .

7) **a)** On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$ alors : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

b) Soit : $x \in]0,+\infty[$; $u(x) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$

La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a pour tout $x \in]0,+\infty[$;

$u'(x) = \ln^2 x + x \times 2 \times \frac{1}{x}\ln x - 2\ln x - 2x \times \frac{1}{x} + 2 = \ln^2 x$.

Donc la fonction u est une primitive de la fonction : $x \longrightarrow \ln^2 x$ sur $]0,+\infty[$

c) Par raison de symétrie, l'aire A n'est autre que l'aire de la partie du plan limitée par (ζ), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$

$A = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(x\ln x - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) dx = \int_1^e x\ln x dx - \frac{1}{2}\int_1^e \ln^2 x dx$

On sait que $\int_1^e x\ln x dx = \frac{e^2+1}{4}$ et $\int_1^e \ln^2 x dx = [u(x)]_1^e = u(e) - u(1) = e - 2$

Donc $A = \frac{e^2+1}{4} - \frac{e-2}{2} = \frac{e^2-2e+5}{4}$