RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (4 points)

Le tableau ci-dessous, donne pour les années indiquées, la production de lait cru en Tunisie.

On considère la série statistique (I, P), où I est le rang de l'année et P est la production annuelle de lait cru en millions de litres.

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
I = rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P = production annuelle de lait cru (en millions de litres)	1014	1030	1059	1096	1124	1175	1218	1376	1428	1424

Source HAL open science

1. Calculer le coefficient de corrélation de la série statistique (I, P). Interpréter le résultat.

2. Donner l'équation de la droite de régression de P en I.

3. a) Estimer la production, en millions de litres, de lait cru en 2023.

b) A partir de quelle année la production de lait cru dépassera-t-elle 1800 millions de litres ?

c) On prévoit que la population tunisienne atteindra 12,5 millions d'habitants en 2024 et qu'en moyenne, un tunisien consomme 135 litres de lait cru par an.

La production de lait cru répondra-t-elle au besoin de la Tunisie en 2024 ?

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient quatre boules rouges et six boules noires, indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne.

1. On considère l'événement A : « Obtenir une seule boule rouge ».

Montrer que P(A)= 0.5, où P(A) est la probabilité de A.

2. Calculer la probabilité de l'événement B : « Obtenir aucune boule rouge ».

3. On répète l'épreuve précédente n fois de suite, $n \geq 2$, en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a obtenu une seule boule rouge.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Exprimer en fonction de n l'espérance mathématique de X, ainsi que sa variance.

Exercice 3 (5 points)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2(1+i)e^{i\frac{\pi}{6}}z + 4ie^{i\frac{\pi}{3}} = 0$.

a) Vérifier que $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire l'autre solution de (E) et la mettre sous forme exponentielle.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

On désigne par H le point d'affixe $z_H = z_A + z_B + z_C$.

a) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (ζ) de centre O et de rayon 2.

b) Construire les points A et B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3. a) Ecrire $\dfrac{z_B + z_C}{z_C - z_B}$ sous forme cartésienne.

b) Montrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

c) Montrer que $z_H = \sqrt{2}(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}}$.

d) Construire alors le point H.

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Interpréter le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

c) Montrer que la courbe (ζ) admet, au voisinage de $(+\infty)$, une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

2. a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=1+\frac{(x-1)\ln x}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $(x-1)\ln x\geq 0$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que la tangente (T) à la courbe (ζ) au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x-1$.

4. On pose pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g(x) = f(x) - x + 1$.

On donne ci-contre le tableau de variation de g.

x	0		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) pour tout $x > 0$.

b) En déduire que le point A(1, 0) est un point d'inflexion de la courbe (ζ).

c) Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $\alpha\in]3,3;\,3,4[$.

5. Soit Δ la droite d'équation $y=x$.

a) Montrer que la droite Δ coupe la courbe (ζ) uniquement au point d'abscisse α.

b) Tracer la tangente (T), la droite Δ et la courbe (ζ) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6. a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR.

On note f^{-1} la fonction réciproque de f, on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Tracer la courbe (Γ).

7. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $y = 1$, $y = e$ et $x = 0$.

a) Montrer que $\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

b) Montrer que la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x)=x\ln^2 x-2x\ln x+2x$ est une primitive de la fonction $x\mapsto \ln^2 x$.

c) Montrer alors que $\mathcal{A}=\frac{e^2-2e+5}{4}$.