MATHÉMATIQUES
Section : Mathématiques
Session de contrôle 2022

Exercice 1 :

1) Soit R = $S_{(OE)} o S_{(OB)}$.

a) On a : R est la composée de deux symétries axiales d'axes sécantes au point O donc R est la rotation de centre O et d'angle $\theta \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv 2(-\frac{\pi}{6})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) On a : OEF un triangle rectangle en E et $\left(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On a : aussi I = O $*$ F donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et IE = IO donc OIE est un triangle équilatéral direct.

On a : $\begin{cases} OE = OI \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$ R(E) = I

2) Soit h = $h_{(O,2)}$ et on pose f = hoR

a) f(E) = hoR(E) = h(I).

On a : I = O $*$ F donc $\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OI}$ d'où h(I) = F par suite f(E) = F.

b) f est la composée d'une homothétie de centre O, de rapport 2 > 0 et d'une rotation de même centre O, d'angle $(-\frac{\pi}{3})$ alors f est une similitude directe de centre O, d'angle $(-\frac{\pi}{3})$ et de rapport 2.

3) a) On a : OEI est un triangle équilatéral et (OA) = med[IE] donc (OA) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{EOI}$ par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{1}{2} \times (-\frac{\pi}{3})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

$\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}}\right)[2\pi] \equiv \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Dans le triangle rectangle OBA on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ donc $OA = 2 \times OB$

Conclusion : $OA = 2 \times OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc f(B) = A.

b) Le triangle OAB est rectangle en B et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$, d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ par suite le triangle EOA est isocèle en E donc EA = EO.

On a : f(B) = A et f(E) = F donc AF = 2BE, or $\frac{BE}{OE} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (OBE triangle rectangle en B)

d'où AF = 2BE = EO, et comme IF = IE = EO (I milieu de [OF] et OEF triangle rectangle en E) alors AF = AE = EI = IF, par suite le quadrilatère AEIF est un losange.

4) Soit g la similitude indirecte telle que g(B) = A et g(E) = F

a) On a : g(B) = f(B) = A et g(E) = f(E) = F donc f et g ont le même rapport par suite le rapport de g est égal à 2.

b) On a : AEIF est un losange donc AEF est un triangle isocèle en A par suite
$\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}}\right)[2\pi]$.

c) On a : g(B) = A, g(E) = F et g(F) = K et comme g est une similitude indirecte donc
$\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right)[2\pi]$

On a : E$\in$[BA] donc $\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) + \pi[2\pi]$

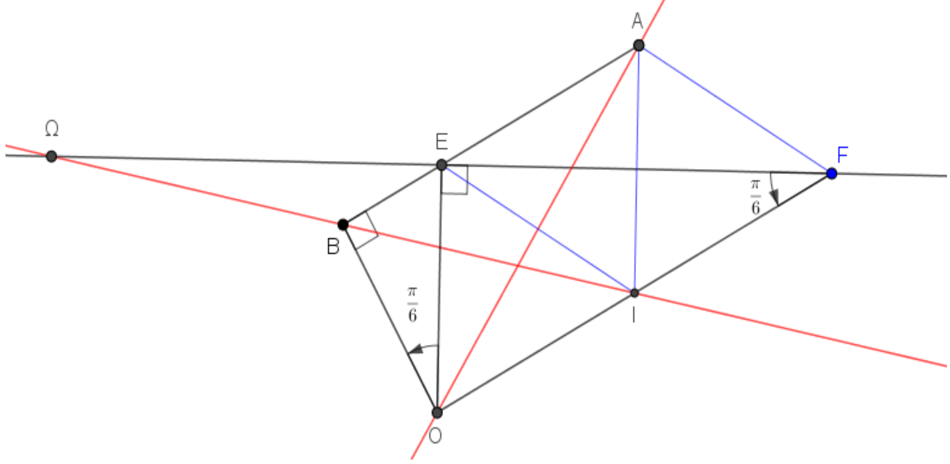
D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) + \pi[2\pi]$ par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv \pi[2\pi]$

Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont colinéaire et de sens contraires donc F$\in$[EK]

d) g est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport 2 donc gog = $h_{(\Omega,\ 4)}$.
gog(E) = g(F) = K donc $\overrightarrow{\Omega K} = 4\times\overrightarrow{\Omega E}$ donc Ω$\in$(EK) = (EF) et Ω$\notin$[EK] donc Ω$\notin$[EF] car F$\in$[EK]

e) Comme g(E) = F alors l'axe de g porte la bissectrice intérieure de $E\Omega F$, or Ω$\in$(EF)\[EF] donc l'axe de g est la droite (EF).

f) On a : Ω$\in$(EF)\[EF] et ΩF = 2ΩE alors Ω est le symétrique de F par rapport à E.



5) a) On a : AEIF est un losange donc $S_{(EF)}$(I) = A, la forme réduite de g est g = $h_{(\Omega,\ 2)}oS_{(EF)}$ alors g(I) = $h_{(\Omega,\ 2)}oS_{(EF)}$(I) = = $h_{(\Omega,\ 2)}$(A) $\in$(ΩA) et comme g(Ω) = Ω alors g((ΩI)) = (ΩA).

b) On a : Les points A, Ω et g(I) sont alignés et comme g^{-1} est une similitude indirecte donc g^{-1}(A) = B, g^{-1}(Ω) = Ω et g^{-1}(g(I)) = I sont alignés.

Exercice 2 :

1) a) $p(A)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$

b) $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=1-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}$

2) a) $X(\Omega)$ = {-2, -1, 0, 2}

$p(X=-2)=\dfrac{C_1^1\times C_1^1}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$, $p(X=-1)=\dfrac{C_1^1\times C_1^1}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$, $p(X=0)=p(B)=\dfrac{7}{10}$,

$p(X=2)=\dfrac{C_1^1\times C_1^1}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$.

b) $E(X)=-2\times\dfrac{1}{10}-1\times\dfrac{1}{10}+0\times\dfrac{7}{10}+2\times\dfrac{1}{10}=-\dfrac{1}{10}=-0{,}1$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=4\times\dfrac{1}{10}+1\times\dfrac{1}{10}+0\times\dfrac{7}{10}+4\times\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{100}=\dfrac{9}{10}-\dfrac{1}{100}=8{,}9$

3) La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètre $(n, \dfrac{7}{10})$

a) $p(Y=1)=C_n^1\dfrac{7}{10}\times(\dfrac{3}{10})^{n-1}=\dfrac{7n}{10}\times(\dfrac{3}{10})^{n-1}=\dfrac{7n\times 3^{n-1}}{10^n}$

b) On a : $E(Y)=\dfrac{7n}{10}$.

$E(Y)\geq 5\Leftrightarrow\dfrac{7n}{10}\geq 5\Leftrightarrow n\geq\dfrac{50}{7}$ donc la plus petite valeur de n vérifiant $E(Y)\geq 5$ est n = 8.

Exercice 3 :

Partie A

1) $x\equiv 1 \pmod p$ alors $x^3\equiv 1^3 \pmod p$ donc $x^3\equiv 1 \pmod p$ d'où x est une solution de (E).

2) a) On suppose que p divise x alors $x\equiv 0 \pmod p$ alors $x^3\equiv 0 \pmod p$ absurde car $x^3\equiv 1 \pmod p$

On a : p est premier et ne divise pas x alors d'après Fermat $x^{p-1}\equiv 1 \pmod p$

b) On a : $p\equiv 2 \pmod 3$ et $p > 3$ alors il existe $m\in IN^*$ tel que $p = 3m + 2$

$x^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ alors $x^{3m+1}\equiv 1 \pmod p$ alors $(x^3)^m.x\equiv 1 \pmod p$.

Or on a : $(x^3)^m\equiv 1 \pmod p$ donc $x\equiv 1 \pmod p$.

3) On a : x est solution de (E) si et seulement si $x\equiv 1 \pmod p$.

Par suite $S_Z = \{1+ kp, k\in Z\}$

Partie B

1) On a : $(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$x^3\equiv 1 \pmod{43}$ ssi $x^3 - 1\equiv 0 \pmod{43}$ ssi $(x - 1)(x^2 + x + 1)\equiv 0 \pmod{43}$

ssi $x - 1\equiv 0 \pmod{43}$ ou $x^2 + x + 1\equiv 0 \pmod{43}$ car 43 est premier

2) a) $(2x + 1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 3 = 4x^2 + 4x + 4 = 4(x^2 + x + 1)$.

$30^2 = 900 = 21\times 43 - 3$ donc $30^2\equiv -3 \pmod{43}$.

b) $(x^2 + x + 1)\equiv 0 \pmod{43}$ alors $4(x^2 + x + 1)\equiv 0 \pmod{43}$ alors $(2x + 1)^2 + 3\equiv 0 \pmod{43}$ alors $(2x + 1)^2\equiv -3 \pmod{43}$.

$(2x + 1)^2\equiv -3 \pmod{43}$ alors $(2x + 1)^2 + 3\equiv 0 \pmod{43}$ alors $4(x^2 + x + 1)\equiv 0 \pmod{43}$ et comme $43\wedge 4 = 1$ alors $(x^2 + x + 1)\equiv 0 \pmod{43}$.

Conclusion : $(x^2 + x + 1)\equiv 0 \pmod{43}$ si et seulement si $(2x + 1)^2\equiv -3 \pmod{43}$.

c) $(x^2 + x + 1)\equiv 0 \pmod{43}$ ssi $(2x + 1)^2\equiv -3 \pmod{43}$ ssi $(2x + 1)^2\equiv 30^2 \pmod{43}$

ssi $(2x + 1)^2 - 30^2\equiv 0 \pmod{43}$ ssi $(2x - 29)(2x + 31)\equiv 0 \pmod{43}$

ssi $(2x - 29) \equiv 0 \pmod{43}$ ou $(2x + 31) \equiv 0 \pmod{43}$ (car 43 est premier)

Conclusion : $(x^2 + x + 1) \equiv 0 \pmod{43}$ ssi $(2x - 29) \equiv 0 \pmod{43}$ ou $(2x + 31) \equiv 0 \pmod{43}$

3) a) $22\times2 = 44 = 43 + 1$ donc $22\times2 \equiv 1 \pmod{43}$.

b) Si x solution de (E_{43}) alors $x \equiv 1 \pmod{43}$ ou $(2x - 29) \equiv 0 \pmod{43}$ ou $(2x + 31) \equiv 0 \pmod{43}$.

$(2x - 29) \equiv 0 \pmod{43}$ alors $2x \equiv 29 \pmod{43}$ alors $x \equiv 22\times29 \pmod{43}$ alors $x \equiv 36 \pmod{43}$.

$(2x + 31) \equiv 0 \pmod{43}$ alors $2x \equiv -31 \pmod{43}$ alors $x \equiv 22\times(-31) \pmod{43}$ alors $x \equiv 6 \pmod{43}$.

Réciproquement :

Si $x \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x \equiv 36 \pmod{43}$ ou $x \equiv 6 \pmod{43}$ alors

$x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^3 \equiv 36^3 \pmod{43}$ ou $x^3 \equiv 6^3 \pmod{43}$ alors

$x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^3 \equiv (-7)^3 \pmod{43}$ ou $x^3 \equiv 216 \pmod{43}$ alors

$x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ alors $x^3 \equiv 1 \pmod{43}$.

Conclusion : $S_Z = \{1 + 43k, k\in Z\}\cup\{36 + 43k, k\in Z\} \cup\{6 + 43k, k\in Z\}$.

Exercice 4 :

Partie A

1) Pour tout $x\in IR$ on a : $(- x) \in IR$ et $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}\times e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}} = f(x)$

Alors f est une fonction paire sur IR.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{1+ e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{e^{x}(e^{-x} + e^{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{-x} + e^{x}} = 0$, donc la droite y = 0 est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $+\infty$.

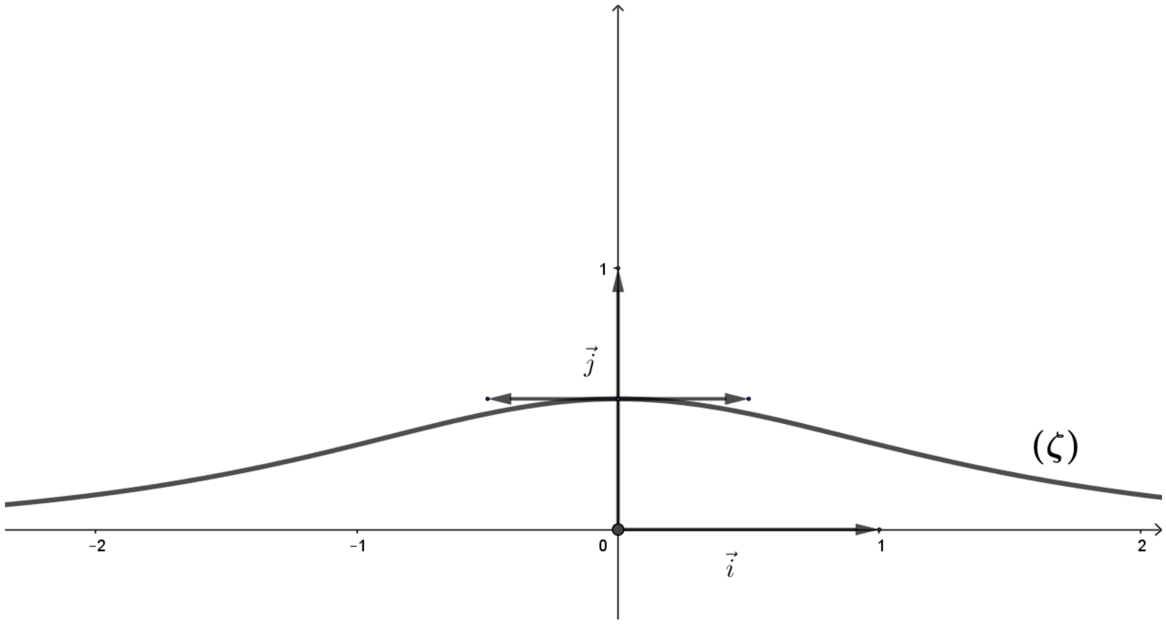
3) a) La fonction f est dérivable sur IR et on a : $f'(x) = \dfrac{e^{x}(1+e^{2x}) - 2e^{2x}e^{x}}{(1+e^{2x})^2} = \dfrac{e^{x} - e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} = \dfrac{e^{x}(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$.

b) On a : $f'(x) = 0$ ssi $x = 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $1 - e^{2x} \geq 0$ ssi $e^{2x} \leq 1$ ssi $2x \leq 0$ ssi $x \leq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+		-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

4)



Partie B

Soit F la fonction définie sur]0, +∞[par $F(x)=\int_0^{\ln x} f(t)dt$

1) La fonction ln est dérivable sur]0, +∞[et pour tout x∈]0, +∞[, lnx∈IR.
La fonction f est continue sur IR.
Par suite la fonction F est dérivable sur]0, +∞[
Pour tout x∈]0, +∞[on a : $F'(x)=\frac{1}{x}f(\ln x)=\frac{1}{x}\times\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}$.

2) Soit la fonction g(x) = tan x.

a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $g(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[)=\left]0,+\infty\right[$, donc g réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur]0, +∞[.

b) On a : $g(\frac{\pi}{4})=1$ donc $g^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$
g est strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $g(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[)=\left]0,+\infty\right[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$

c) On a : g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x∈ $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ g'(x) = 1 + $\tan^2 x \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur]0, +∞[.
Soit x∈]0, +∞[. On pose y = $g^{-1}(x)$ alors $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$

3) On a : pour tout x∈]0, +∞[, F '(x) = $(g^{-1})'(x)$ donc F(x) = $g^{-1}(x)$ + c.
Comme F(1) = 0 et $g^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$ alors $c=-\frac{\pi}{4}$, par suite $F(x)=g^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}$

4) Soit $\lambda > 0$.

a) $A(\lambda)=\int_{-\lambda}^{\lambda} f(t)dt = 2\int_0^{\lambda} f(t)dt = 2\int_0^{\ln(e^{\lambda})} f(t)dt = 2F(e^{\lambda})$

b) On a : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

Par suite $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

Partie C

On considère la suite $I_n=\int_0^1 t^n F(e^t)dt$, $n\in \mathbb{N}^*$.

1) a) Pour tout $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$ et $f(t) > 0$ donc $F(x)=\int_0^{\ln x} f(t)dt \geq 0$

Or pour tout $t \geq 0$, $e^t \geq 1$ donc $F(e^t) \geq 0$.

Pour tout $x > 0$, $g^{-1}(x)\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ alors $F(x)=g^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ donc $F(e^t)<\frac{\pi}{4}$ pour tout $t > 0$.

Conclusion : Pour tout $t \geq 0$, $0\leq F(e^t)\leq\frac{\pi}{4}$

b) On a : Pour tout $t \geq 0$, $0\leq F(e^t)\leq\frac{\pi}{4}$ donc $0\leq t^nF(e^t)\leq t^n\frac{\pi}{4}$ d'où $0\leq\int_0^1 t^nF(e^t)dt\leq\frac{\pi}{4}\int_0^1 t^n dt$

D'où pour tout $n\in \mathbb{N}^*$ $0\leq I_n\leq\frac{\pi}{4}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ par suite $0\leq I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{4(n+1)}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

2) a) On a : $I_n=\int_0^1 t^nF(e^t)dt$

On pose $\begin{cases} u(t)=F(e^t) \\ v'(t)=t^n \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t)=f(t) \\ v(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

D'où $I_n=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}F(e^t)\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt=\frac{F(e)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt$

b) On a : $I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}=\frac{F(e)}{n+1}$ (1)

D'autre part on a pour tout réel t, $f(t)\leq\frac{1}{2}$ alors pour tout $t\in[0, 1]$, $0\leq t^{n+1}f(t)\leq\frac{1}{2}t^{n+1}$ donc

$0\leq\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt\leq\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n+1}dt$ d'où $0\leq\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt\leq\frac{1}{2(n+2)}$ par suite

$0\leq\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt\leq\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ d'où $-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt\geq-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ par suite

$I_n=\frac{F(e)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt\geq\frac{F(e)}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ (2)

D'après (1) et (2) on a : $\frac{F(e)}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\leq I_n\leq\frac{F(e)}{n+1}$ par suite

$\frac{n}{n+1}F(e)-\frac{n}{2(n+1)(n+2)}\leq nI_n\leq\frac{n}{n+1}F(e)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=F(e)=g^{-1}(e)-\frac{\pi}{4}$