MATHÉMATIQUES
Section : Sciences Techniques
Session principale 2021

Exercice 1 :

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse exacte	**c)**	**a)**	**c)**	**b)**

Exercice 2 :

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\ \ x\ = \lim\limits_{x\to-\infty}\ 2x+1\ e^{-2x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f\ \ x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)e^{-2x} = +\infty$ donc ζ admet au voisinage de $(-\infty)$ une branche parabolique de direction celle de la droite de ordonnées.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\ \ x\ = \lim\limits_{x\to+\infty}\ 2x+1\ e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(\frac{e^{2x}}{2x})} + \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$

2) a) Pour tout réel x, $f\ '\ x\ = 2e^{-2x} - 2e^{-2x}\ \ 2x+1\ = -4xe^{-2x}$

b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f\ '\ x$	$+$		$-$
f	$-\infty$ ↗	1	↘ 0

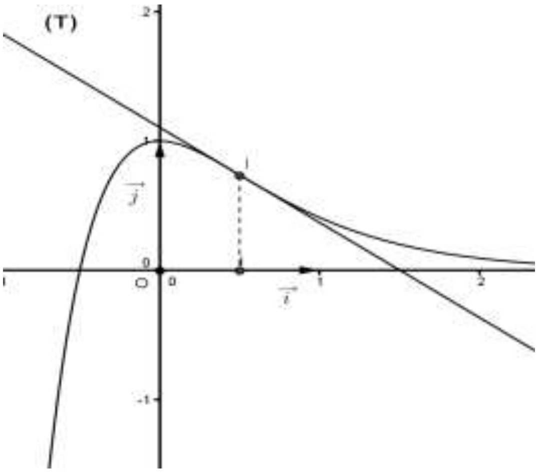
c) f est deux fois dérivable sur IR et on a :
$f\ "\ x\ = -4xe^{-2x} = -4\ \ e^{-2x} - 2xe^{-2x}\ \ = 4e^{-2x}\ \ 2x-1$

La dérivée seconde de f s'annule en $\dfrac{1}{2}$ et en changeant de signe donc le point $\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ c'est-à-dire $I\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{e}\right)$ est un point d'inflexion de ζ .

d) $T : y = f\ '\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ d'où $T : y = -\dfrac{2}{e}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{2}{e}$

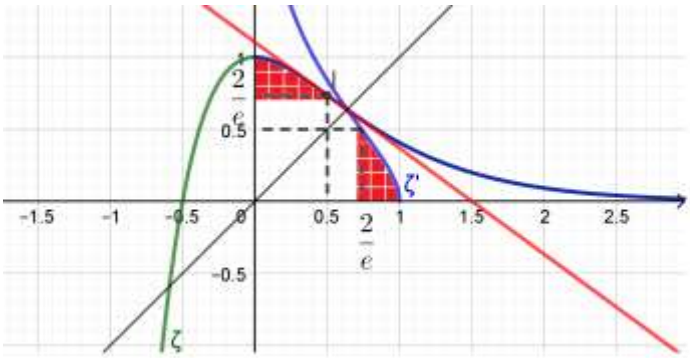
par suite $T : y = -\dfrac{1}{e}\ \ 2x-3$

e)



3) a) g est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ donc elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J=g\left([0,+\infty[\right)=]0,1]$.

b)



4) a) $F(x)=-(x+1)e^{-2x}$.

F est dérivable sur IR et on a :

$F'(x)=-e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}=(2x+1)e^{-2x}=f(x)$, par suite F est donc une primitive de f sur IR.

b) Par raison de symétrie par rapport à la première bissectrice, l'aire de domaine du plan donné est égale à l'aire du domaine limité par : la courbe de g et les droites d'équations : x = 0, y = 1 et $y=\frac{2}{e}$

$$\mathcal{A}=\int_{\frac{2}{e}}^{1}\left|g(x)dx\right|=\int_{\frac{2}{e}}^{1}g(x)dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(f(x)-\frac{2}{e}\right)dx=\left[F(x)-\frac{2}{e}x\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$=F\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{e}-F(0)=\frac{2e-5}{2e}\text{u.a}$$

Exercice 3 :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

Par suite, les points A, B et C déterminent un plan P.

2) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et comme $\overrightarrow{N}=-\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ alors ce vecteur est aussi orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) D'après la question précédente, $\overrightarrow{N}$ est un vecteur normal à P, donc $P: 2x-y+2z+d=0$ et comme $C\ \ 0, 0, 2\ \in P$ alors $4+d=0$ d'où $P: 2x-y+2z-4=0$.

3) a) On a : 2x0 – 0 + 2x1 – 4 = - 2 ≠ 0 donc E(0, 0, 1)∉P.

b) On a : $2\times\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+2\times\frac{13}{9}-4=\frac{36}{9}-4=0$ donc $H\left(\frac{4}{9},\frac{-2}{9},\frac{13}{9}\right)\in P$.

De plus $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{-2}{9}\\\frac{4}{9}\end{pmatrix}=\frac{2}{9}\overrightarrow{N}$ alors EH est perpendiculaire au plan P en H,

c'est-à-dire que H est le projeté orthogonal de E sur le plan P.

c) Déjà $H\in P$.

$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{-2}{9}\\-\frac{5}{9}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+0=0$ Par suite $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\\frac{16}{9}\\\frac{4}{9}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=-\frac{4}{9}+0+\frac{4}{9}=0$ Par suite $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$

Conclusion : Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

4) a) $M\ \ x,y,z\ \in S$ sig $x^2+y^2+z^2-2z=0$ sig $\ x-0\ ^2+\ y-0\ ^2+\ z-1\ ^2=1$

Par suite S est la sphère de centre E et de rayon 1.

b) $d(E,P)=\dfrac{|-2|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{2}{3}<1$ donc S et P se coupent suivant un cercle (ζ) de centre H projeté orthogonal de E sur P et de rayon $\sqrt{1^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

c) $HA=\sqrt{\left(1-\dfrac{4}{9}\right)^2+\left(0+\dfrac{2}{9}\right)^2+\left(1-\dfrac{13}{9}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{25}{81}+\dfrac{4}{81}+\dfrac{16}{81}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ donc $A\in(\zeta)$

$HC=\sqrt{\left(0-\dfrac{4}{9}\right)^2+\left(0+\dfrac{2}{9}\right)^2+\left(2-\dfrac{13}{9}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{16}{81}+\dfrac{4}{81}+\dfrac{25}{81}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ donc $C\in(\zeta)$

d) Appelons Q le plan médiateur du segment $[AC]$.

On a : $HA=HC$ donc $H\in Q$.

A et C sont deux points de (ζ) = S$\cap$P donc ces deux points sont sur la sphère S de centre E et par suite $EA=EC$ donc $E\in Q$.

On vérifie aussi que $BA=BC=\sqrt{5}$ donc $B\in Q$.

Comme $E\notin P$ alors B, E et H ne sont pas alignés.

On peut conclure que $Q=(EHB)$.

Exercice 4 :

I) 1) $(1-i\sqrt{3})^2=1-2i\sqrt{3}-3=-2-2i\sqrt{3}$.

2) $2z^2-4i\sqrt{3}z-5+i\sqrt{3}=0$.

$\Delta'=-12-2\times(-5+i\sqrt{3})=-2-2i\sqrt{3}=(1-i\sqrt{3})^2$.

$z_1=\dfrac{2i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-1+3i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{2i\sqrt{3}+1-i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

$S_C=\{z_1\ ,\ z_2\}$

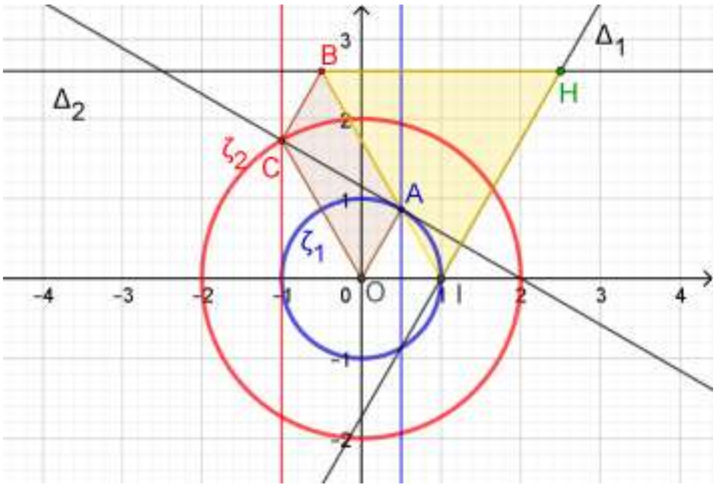
II) 1) $z_A=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_C=-1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2) a) $OA=1$ donc $A\in\zeta_1$ et OC = 2 donc $C\in\zeta_2$.

b) $Z_{\overrightarrow{OA}}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $Z_{\overrightarrow{CB}}=Z_B-Z_C=\dfrac{-1+3i\sqrt{3}}{2}+1-i\sqrt{3}=Z_{\overrightarrow{OA}}$

donc le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

c)



3) $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{OA}}} = \dfrac{2e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = 1 + i\sqrt{3} - 1 = i\sqrt{3} \in iIR$.

Donc $AC \perp (OA)$ et comme OA est un rayon du cercle ζ_1 donc AC est tangente à ζ_1 en A.

4) a) $H \in \Delta_2$ donc $\text{Im } Z_H = \text{Im } Z_B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ et par suite $Z_H = x + i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ où $x \in IR$.

b) $Z_{\overrightarrow{IH}} = Z_H - 1 = IH \times e^{\arg Z_{\overrightarrow{IH}}} = IH \times e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $Z_H - 1 = r \times e^{i\frac{\pi}{3}}$ avec r = IH

c) D'après les deux questions précédentes, $x + i\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 1 + r\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et par identification :

$$\begin{cases} r = 3 \\ x = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$ d'où $Z_H = \dfrac{5 + 3i\sqrt{3}}{2}$.

<u>Remarque</u> :

On peut trouver les coordonnées de H de la manière suivante :

Δ_1 et (OA) sont perpendiculaires à (AC° donc elles sont parallèles et par suite

$\Delta_1 : y = \tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)x + b = \sqrt{3}x + b$ et comme $I\ 1{,}0 \in \Delta_1$ alors $\Delta_1 : y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

Δ_2 est la parallèle à la droite réelle passant par le point B et comme $y_B = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ alors $\Delta_2 : y = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Par suite, $H\ x,y \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ signifie $\begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ soit $H\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

5) On a : IH = r = 3 ; $BH = \left| \frac{5 + 3i\sqrt{3}}{2} - \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{2} \right| = 3$

et $BI = \left| 1 - \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{3 - 3i\sqrt{3}}{2} \right| = 3$

Donc le triangle BIH est équilatéral.

Autre méthode : On a IH = BH = 3

La droite (BH) et l'axe des abscisses sont parallèles coupés par une sécante (IH) déterminent deux angles alternes internes égaux

Comme $BHI = IOA = \frac{\pi}{3}$ d'où le triangle BIH est équilatéral.