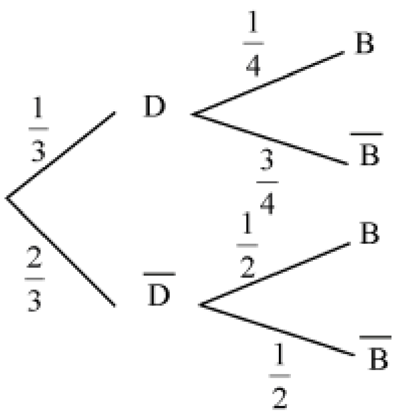
MATHÉMATIQUES
Section : Sciences Expérimentales
Session principale 2021

Exercice 1 (4 pts)

1. a) $p(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\cdot$

   b)



2. a) $p(B)=p(B\cap D)+p(B\cap\overline{D})=p(D)p(B|D)+p(\overline{D})p(B|\overline{D})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}\cdot$

   b) $p(\overline{D}|B)=\frac{p(B\cap\overline{D})}{p(B)}=\frac{p(\overline{D})p(B|\overline{D})}{p(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{3}\times\frac{12}{5}=\frac{4}{5}\cdot$

3. a) X suit la loi Binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{5}{12}\cdot$

   Alors $X(E)=\{0,1,2,3,4,5\}$ et pour tout $k\in X(E)$, $p(X=k)=C_5^k\left(\frac{5}{12}\right)^k\left(\frac{7}{12}\right)^{5-k}$.

   b) $p(X=1)=C_5^1\left(\frac{5}{12}\right)^1\left(\frac{7}{12}\right)^4=\frac{60025}{248832}\approx 0.241.$

   c) $q=1-p(X=5)=1-\left(\frac{5}{12}\right)^5=1-\frac{3125}{248832}=\frac{245707}{248832}\approx 0.987.$

Exercice 2 (5 pts)

1. a) $(E): Z^2-2(1+i\sqrt{3})Z+4(-1+i\sqrt{3})=0.$

   $(2\sqrt{3}-2i)^2=(2\sqrt{3})^2-8\sqrt{3}i+(2i)^2=12-8\sqrt{3}i-4=8-8\sqrt{3}i.$

b) $(E): Z^2 - 2\left(1+i\sqrt{3}\right)Z + 4\left(-1+i\sqrt{3}\right) = 0.$

$$\Delta = \left(2\left(1+i\sqrt{3}\right)\right)^2 - 16\left(-1+i\sqrt{3}\right) = 4\left(1-3+2i\sqrt{3}\right) + 16 - 16i\sqrt{3}$$

$$= 8 - 8i\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3} - 2i\right)^2$$

$$z' = \frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{3} - 2i}{2} = 1 + \sqrt{3} - i\left(1-\sqrt{3}\right)$$

$$z'' = \frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{3} + 2i}{2} = 1 - \sqrt{3} + i\left(1+\sqrt{3}\right).$$

$S_{\mathbb{C}} = \{z', z''\}.$

2. $Z_A = 1+\sqrt{3} - i\left(1-\sqrt{3}\right)$, $Z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $Z_C = 1-\sqrt{3} + i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

a) $iZ_A = i\left(1+\sqrt{3} - i\left(1-\sqrt{3}\right)\right) = i\left(1+\sqrt{3}\right) + 1 - \sqrt{3} = 1-\sqrt{3} + i\left(1+\sqrt{3}\right) = Z_C.$

b) $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$. $\dfrac{Z_C}{Z_A} = i$. Comme $\dfrac{Z_C}{Z_A}$ est imaginaire alors $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$.

$|Z_C| = |i| \times |Z_A|$ alors $OC = OA$.

Ainsi le triangle OAC est rectangle et isocèle en O.

c) $Z_A + Z_C = 1+\sqrt{3} - i\left(1-\sqrt{3}\right) + 1 - \sqrt{3} + i\left(1+\sqrt{3}\right) = 2 + 2i\sqrt{3} = Z_B$.

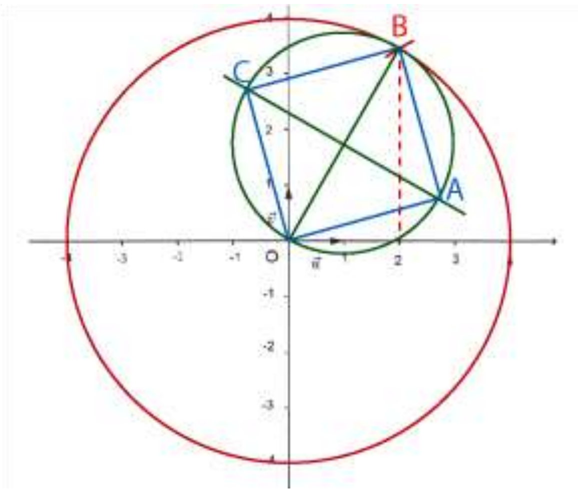
Alors le quadrilatère OABC est un parrallèlogramme.

De plus $OA = OC$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$, donc OABC est un carré.

3. a)

$$Z_B = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

b)



c) OABC est un carré donc A et C appartiennent à l'intersection de la médiatrice de $[OB]$ avec le cercle de diamètre $[OB]$. De plus $\text{Ré}(Z_A)>0$ et $\text{Ré}(Z_A)<0$.

4. $\theta\in[0,\pi]$. $Z_M=1+i\sqrt{3}+2e^{i\theta}$.

a) $M=B \Leftrightarrow 1+i\sqrt{3}+2e^{i\theta}=2+2i\sqrt{3} \Leftrightarrow 2e^{i\theta}=1+i\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 2e^{i\theta}=2e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}\left(\text{car } \theta\in[0,\pi]\right).$$

b) OAB est un triangle rectangle en A. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle OAB.

Le point K milieu de $[OB]$ est le centre de Γ. $Z_K=\frac{Z_B}{2}=1+i\sqrt{3}$

$\frac{OB}{2}=2$ est le rayon de Γ.

Soit $\theta\in[0,\pi]$. $Z_M=1+i\sqrt{3}+2e^{i\theta}$ alors $Z_M-\left(1+i\sqrt{3}\right)=2e^{i\theta}$

Alors $\left|Z_M-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|=2$ d'où $KM=2$ par suite, $M\in\Gamma$.

Exercice 3 (4 pts)

$$K=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{x\ln x}{\left(x^2-1\right)^2}dx \text{ et } J=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}dx.$$

1. a) Pour tout $x\in\left[\sqrt{e},e\right]$, $\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-x^2+1}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}$.

b) $J=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}dx=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|-\ln|x|\right]_{\sqrt{e}}^{e}$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(e^2-1\right)-1-\frac{1}{2}\ln(e-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln(e+1)-\frac{1}{2}.$$

2. a) $K=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{x\ln x}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$

On pose $u(x)=\ln x$ $\qquad u(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}$ $\qquad v(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2-1}$

$$K=\left[\frac{1}{2}\times\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_{\sqrt{e}}^{e}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}dx=\frac{-1}{2\left(e^2-1\right)}+\frac{1}{4(e-1)}+\frac{1}{2}J$$

$$=\frac{-2}{4\left(e^2-1\right)}+\frac{e+1}{4\left(e^2-1\right)}+\frac{1}{2}J=\frac{e-1}{4\left(e^2-1\right)}+\frac{1}{2}J=\frac{1}{4(e+1)}+\frac{1}{2}J$$

Ainsi $2K=\dfrac{1}{2(e+1)}+J.$

b) $2K=\dfrac{1}{2(e+1)}+J=\dfrac{1}{2(e+1)}+\dfrac{1}{2}\ln(e+1)-\dfrac{1}{2}$

Ainsi $K=\dfrac{1}{4(e+1)}+\dfrac{1}{4}\ln(e+1)-\dfrac{1}{4}\cdot$

Exercice 4 (7 pts)

1. a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0.$

b) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{3}\cdot$

c)

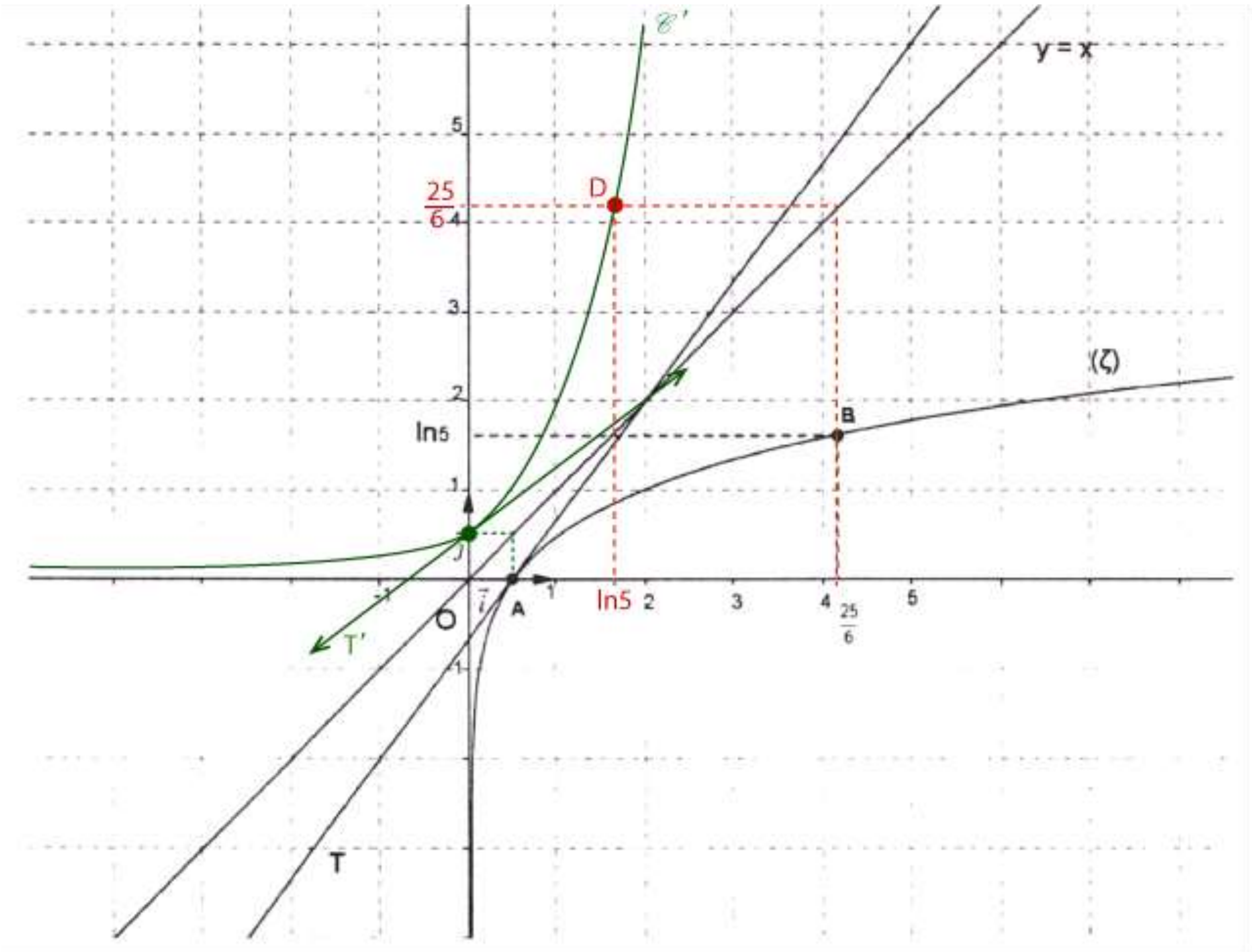
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) On a : f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f\left(]0,+\infty[\right)$

On a : f est continue donc $f\left(]0,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\right[=\mathrm{IR}$

Par suite f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR.

2. a)



b) $\zeta' = S_\Delta(\zeta)$

3. a)

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]0,+\infty\right[\\ f(y) = x \end{cases}$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}\right) = x \Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2} = e^x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4y} = 2e^x - y$$

$$\Leftrightarrow y^2+4y = 4e^{2x} - 4ye^x + y^2 \Leftrightarrow 4y = 4e^{2x} - 4ye^x \Leftrightarrow y + ye^x = e^{2x} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

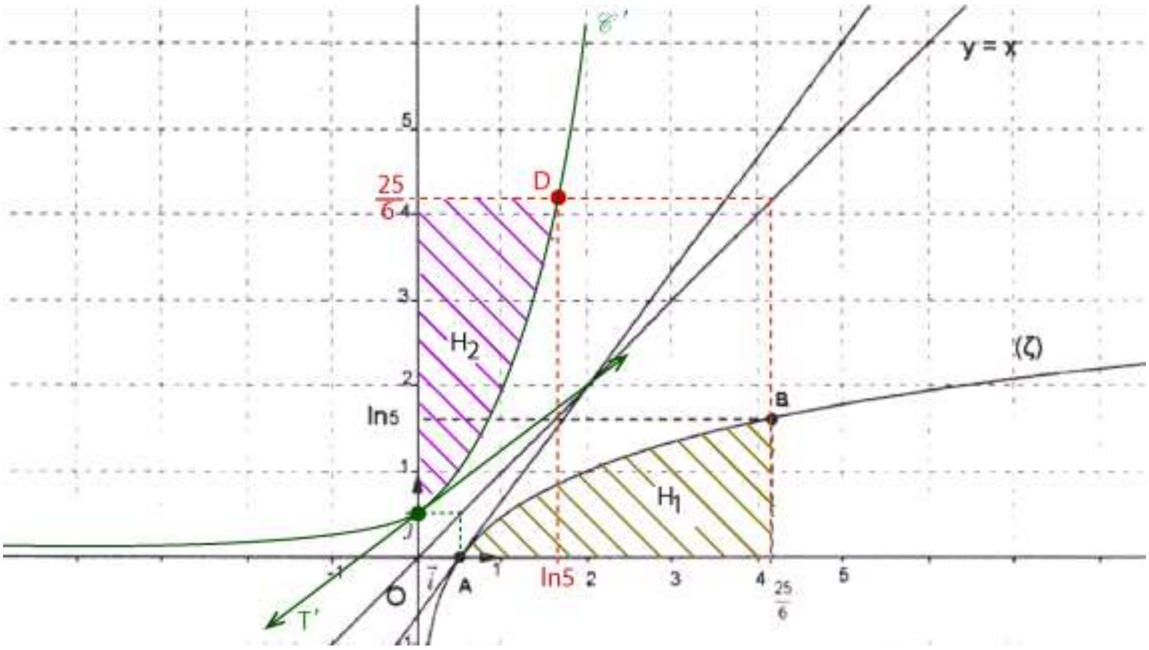
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$.

b) Pour tout $x \in IR$, on a ; $e^x - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x} = f^{-1}(x)$

4. a) Soit H_1 la partie du plan limitée par ζ, les droites d'équations respectives $y=0,\ x=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{25}{6}$.

Soit H_2 la partie du plan limitée par ζ' et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=\ln 5$ et $y=\frac{25}{6}$.

$\text{Aire}(H_1)=\text{Aire}(H_2)$. Par suite $A=\int_0^{\ln 5}\left(\frac{25}{6}-f^{-1}(x)\right)dx.$



b) $\mathcal{A}=\int_0^{\ln 5}\left(\frac{25}{6}-f^{-1}(x)\right)dx=\int_0^{\ln 5}\frac{25}{6}dx-\int_0^{\ln 5}f^{-1}(x)dx.$

On a $\int_0^{\ln 5}\frac{25}{6}dx=\frac{25}{6}\ln 5.$

$$\int_0^{\ln 5}f^{-1}(x)dx=\int_0^{\ln 5}e^x-\frac{e^x}{1+e^x}dx=\left[e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\ln 5}$$

$$=5-\ln 6-1+\ln 2=4-\ln 3.$$

Par suite $\mathcal{A}=\frac{25}{6}\ln 5-4+\ln 3$