RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	**Session principale**
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

* * * * *

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4 points)

On considère un dé cubique équilibré à six faces dont deux portent le chiffre 1 et les autres portent le chiffre 2.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- L'urne U_1 contient une boule blanche et trois boules rouges.
- L'urne U_2 contient deux boules blanches et deux boules rouges.

Une épreuve consiste à lancer une fois le dé : Si la face supérieure porte le chiffre 1, on tire au hasard une boule de l'urne U_1 ; si la face supérieure porte le chiffre 2 , on tire au hasard une boule de l'urne U_2.

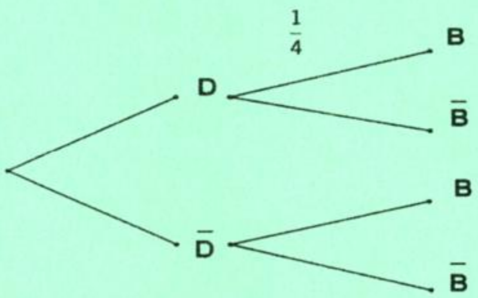
On considère les événements suivants :

D : « La face supérieure du dé porte le chiffre 1 ».

B : « Tirer une boule blanche ».

1) a) Montrer que $p(D)=\dfrac{1}{3}$

b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2) a) Montrer que $p(B)=\dfrac{5}{12}$.

b) Sachant que l'on a tiré une boule blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_2 ?

3) On répète l'épreuve cinq fois de suite en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité d'obtenir une seule fois une boule blanche.

c) Soit q la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge. Calculer q .

Exercice 2 (5 points)

1) a) Vérifier que $(2\sqrt{3}-2i)^2 = 8-8i\sqrt{3}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i\sqrt{3})z + 4(-1+i\sqrt{3}) = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+\sqrt{3} - i(1-\sqrt{3})$, $z_B = 2+2i\sqrt{3}$ et $z_C = 1-\sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})$.

   a) Montrer que $z_C = iz_A$.

   b) En déduire que le triangle OAC est rectangle et isocèle.

   c) Montrer que le quadrilatère OABC est un carré.

3) a) Montrer que $z_B = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   b) Construire dans la figure de **l'annexe 1** ci-jointe le point B.

   c) Construire alors les points A et C.

4) Soit $\theta \in [0, \pi]$. On désigne par M le point du plan d'affixe $z_M = 1+i\sqrt{3}+2e^{i\theta}$.

   a) Pour quelle valeur de θ a-t-on M = B ?

   b) Montrer que lorsque θ varie dans $[0, \pi]$, le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OAB.

Exercice 3 (4 points)

On considère les intégrales $K = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$ et $J = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \left[\sqrt{e}\ ,\ e\right]$, $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x}$

   b) Calculer alors l'intégrale J .

2) a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $2\,K = J + \frac{1}{2(e+1)}$.

   b) En déduire que $K = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln(e+1) + \frac{1}{4(e+1)}$.

Exercice 4 (7 points)

Dans **l'annexe 2** ci-jointe on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (ζ) d'une fonction f dérivable et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, sa tangente T au point $A(\frac{1}{2},0)$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

- La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (ζ).
- La courbe (ζ) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$, au voisinage de $+\infty$.
- La courbe (ζ) passe par le point $B(\frac{25}{6},\ln 5)$.
- La droite T a pour équation : $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

1) Exploiter le graphique et les informations fournies pour répondre aux questions ci-dessous.
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b) Déterminer $f'(\frac{1}{2})$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f
   d) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f et (ζ') sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Construire le point $D(\ln 5, \frac{25}{6})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   b) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (ζ') ainsi que sa tangente T' au point d'abscisse 0.

   Dans la suite, **on donne** $f(x) = \ln(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2})$, pour tout $x \in]0,+\infty[$.

3) a) Montrer que pour tout réel x, $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}$.
   b) Vérifier que pour tout réel x, $f^{-1}(x) = e^{x} - \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$

4) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{25}{6}$.
   a) Exploiter le graphique pour justifier que $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 5} (\frac{25}{6} - f^{-1}(x))dx$.
   b) En déduire que $\mathcal{A} = -4 + \frac{25}{6}\ln 5 + \ln 3$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

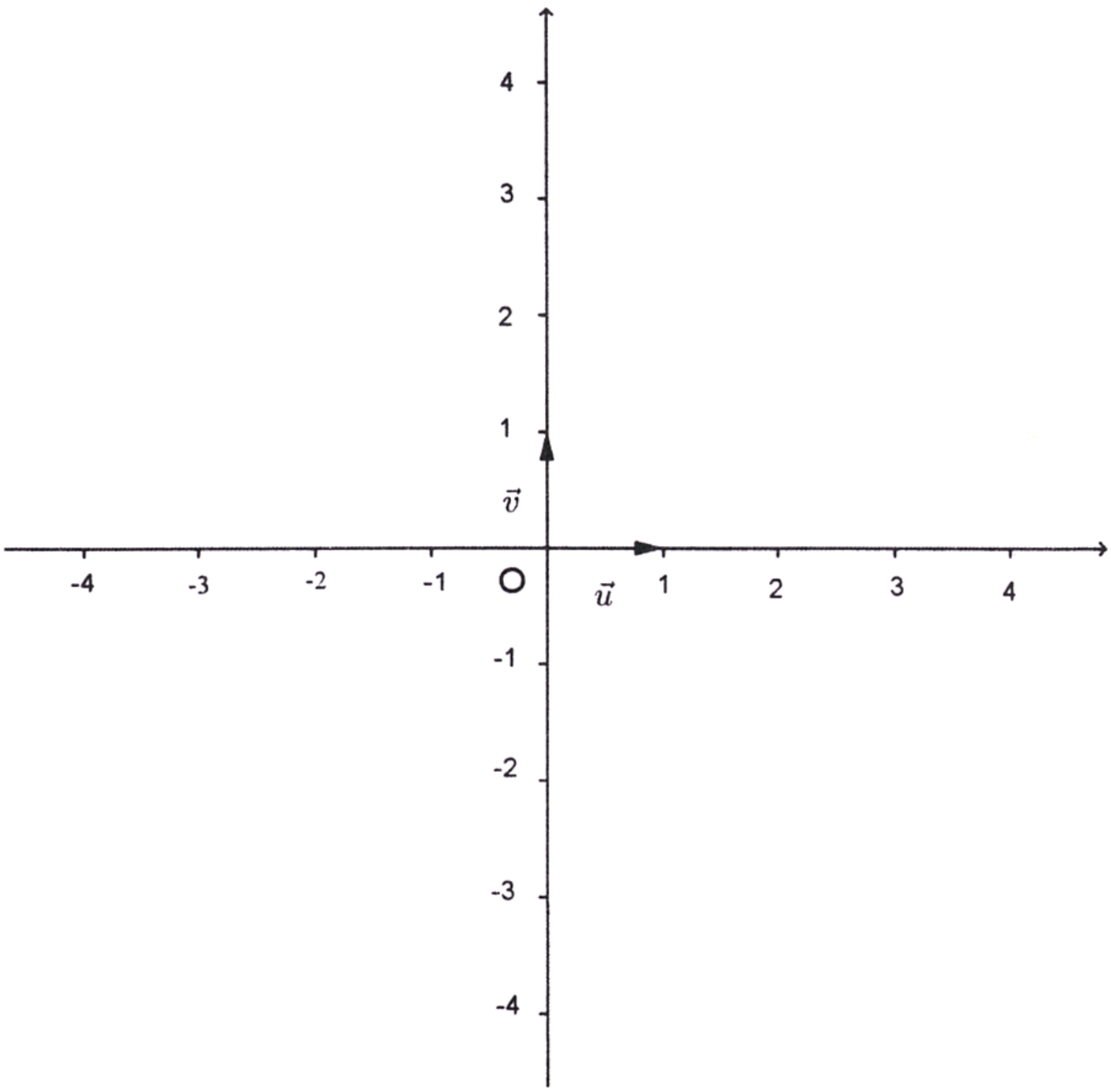
. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales

Session principale (2021)

Annexe 1 à rendre avec la copie



Ne rien écrire ici

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2021)
Annexe 2 à rendre avec la copie