MATHÉMATIQUES
Section : Mathématiques
Session principale 2021

Exercice 1 :

1/ a/ OABC est un rectangle de centre I donc IO = IC et comme $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou encore $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors IOC est équilatéral.

Ainsi IB = IO = OC et OD = OC alors OD = OB $\neq$ 0, par suite il existe un unique déplacement f tel que f(O) = I et f(D) = B.

b/ $\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{IB}}\right) \equiv \left(\widehat{\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Comme $\frac{\pi}{6} \neq 2k\pi$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

c/ Le centre Ω de f est le point d'intersection des médiatrices de $[OI]$ et $[BD]$.

med($[OI]$) $\cap$ med($[BD]$) = $\{\Omega\}$

2) a/ g est l'antidéplacement tel que g(O) = I et g(D) = B donc g soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante et comme on a med($[OI]$) $\neq$ med($[BD]$) alors g est une symétrie glissante.

b/ g(O) = I g(B) = D donc l'axe de g est la droite des milieux des segments $[OI]$ et $[BD]$ qui est (IK).

On sait que l'axe de la symétrie glissante est globalement invariant c'est-à-dire que g((JK)) = (JK).

Maintenant : E$\in$(OD) donc g(E) $\in$(IB) et E$\in$(JK) donc g(E) $\in$(JK)

Il vient alors que g(E) $\in$(IB) $\cap$ (JK) =$\{$J$\}$, par suite g(E) = J.

c/ $g = t_{\vec{u}} o S_{(JK)} = S_{(JK)} o t_{\vec{u}}$ et comme E$\in$(JK) alors $g(E) = t_{\vec{u}}(E) = J$ et par suite $\vec{u} = \overrightarrow{EJ}$.

Conclusion : $g = t_{\overrightarrow{EJ}} o S_{(JK)} = S_{(JK)} o t_{\overrightarrow{EJ}}$.

3) a/ On a $f^{-1}og$ est la composée d'un déplacement et un antidéplacement donc c'est un antidéplacement.

- $f^{-1}og(O) = f^{-1}[g(O)] = f^{-1}[I] = O$ et $f^{-1}og(D) = f^{-1}[g(D)] = f^{-1}[B] = D$
- $S_{(OA)}(O) = O$ et $S_{(OA)}(D) = D$ car $D \in (OA)$

Ainsi, $f^{-1}og$ et $S_{(OA)}$ sont deux antidéplacements qui coïncident en deux points distincts O et D donc $f^{-1}og = S_{(OA)}$.

$f^{-1}og = S_{(OA)}$ donc $g^{-1}of = S_{(OA)}$ ou encore $f = goS_{(OA)}$.

Par suite $f(E) = goS_{(OA)}(E) = g\left[S_{(OA)}(E)\right] = g(E) = J$

b/ $f(O) = I$, $f(E) = J$ et f conserve les distances alors $OE = IJ$ et comme $OJ = IJ$ alors $OE = OJ$

La rotation f de centre Ω envoie E sur J donc ΩE = ΩJ

Les points O et Ω sont équidistants des extrémités du segment $[EJ]$ donc $(O\Omega) = \text{méd}[EJ]$, $(O\Omega) \perp (EJ)$ et $K \in (EJ)$ alors $(O\Omega) \perp (JK)$

4) a/ $Z_I = OI\, e^{i\frac{\pi}{6}} = OC\, e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b/ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{AB}{OB}$ donc $OB = \frac{AB}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2$ et par suite $Z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$Z_K = \frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}} + 1}{2} \text{ et } Z_J = \frac{Z_O + Z_I}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2} \text{ alors}$$

$$Z_K = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} + 1}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

c/ $\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{JK}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EJ}}\right)[2\pi] \equiv \dfrac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2}(2\pi) \equiv \dfrac{\pi}{12}[2\pi]$

5) a/ $S_{(OA)}(M) = N$ et $E \in (OA)$ alors $EM = EN$ et

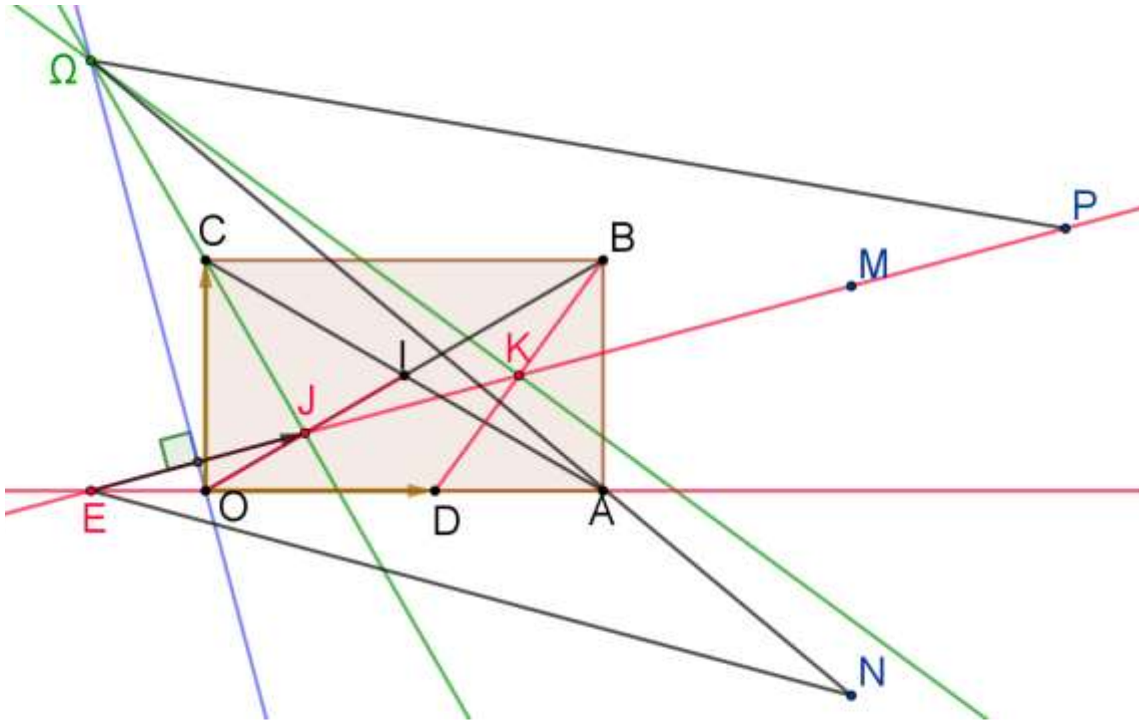
$\left(\widehat{\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EN}}\right) \equiv -2\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{JK}}\right)[2\pi] \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ et par suite $r(M) = N$.

b/ $S_{(OA)}(M) = N$

f et r sont deux rotations d'angles opposés donc for est une translation.

De plus $for(E) = f(E) = J$ donc $for = t_{\overrightarrow{EJ}}$

$f(N) = for(M) = t_{\overrightarrow{EJ}}(M) = t_{\overrightarrow{EJ}}\left(g^{-1}(P)\right) = t_{\overrightarrow{EJ}}\left(t_{\overrightarrow{JE}}oS_{(JK)}(P)\right) = S_{(JK)}(P) = P$



Exercice 2 :

1) a/ Pour n = 0, $21^0 = 1$ et $1 + 20 \times 0 = 1$ donc $21^0 \equiv 1 + 20 \times 0 \pmod{100}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $21^n \equiv 1 + 20n \pmod{100}$ et montrons que $21^{n+1} \equiv 21 + 20n \pmod{100}$.

$21^{n+1} \equiv 21 \times 21^n \pmod{100} \equiv 21 \times (1 + 20n) \pmod{100}$

$\equiv 21 + 20n + 100 \times 4n \pmod{100} \equiv 21 + 20n \pmod{100}$

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $21^n \equiv 1 + 20n \pmod{100}$.

b/ $2021 \equiv 21 \pmod{100}$ donc

$2021^{2021} \equiv 21^{2021} \pmod{100} \equiv 1 + 20 \times 2021 \pmod{100} \equiv 21 \pmod{100}$.

Donc les deux derniers chiffres du nombre 2021^{2021} sont 2 pour les dizaines et 1 pour unité.

2) $E = \{x, x \in \mathbb{Z} / \forall n \in \mathbb{N}, x^n \equiv 1 + n(x-1) \pmod{100}\}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 1) a/, $21^n \equiv 1 + 20n \pmod{100}$ ou encore $21^n \equiv 1 + n(21-1) \pmod{100}$ et ceci prouve que $21 \in E$.

3) a/ Soit $x \in E$.

$x^n \equiv 1 + n(x-1) \pmod{100}$ est vraie pour tout entier naturel n.

En particulier, pour $n = 2$; $x^2 \equiv 1 + 2(x-1) \pmod{100}$

sig $x^2 \equiv 2x - 1 \pmod{100}$

sig $x^2 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod{100}$

sig $(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{100}$

b/

Reste modulo 10 de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de a²	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Le tableau de congruence précédent montre que
$a^2 \equiv 0(\mathrm{mod}10)$ ssi $a \equiv 0(\mathrm{mod}10)$.

$(x-1)^2 \equiv 0(\mathrm{mod}100)$ sig $(x-1)^2 = 10\times 10k (k \in Z)$ c'est à dire
$(x-1)^2 \equiv 0(\mathrm{mod}10)$ donc $x-1 \equiv 0(\mathrm{mod}10)$ ou encore $x \equiv 1(\mathrm{mod}10)$.

Autrement :

On note r le reste modulo 10 de $(x-1)$.

Si $(x-1)$n'est pas un multiple de 10 alors $r \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = A$

Reste modulo 10 de x - 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de $(x - 1)^2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Avec cette hypothèse $(x -1)^2$ n'est pas un multiple de10 par conséquent le chiffre des unités de $(x -1)^2$ est non nul par la suite $(x -1)^2$ n'est pas divisible par 100.

Conclusion : $x-1 \equiv 0(\mathrm{mod}10)$ ou encore $x \equiv 1(\mathrm{mod}10)$.

Ou bien :

Comme $(x-1)^2 \equiv 0(\mathrm{mod}100)$ alors chacun des entiers (naturels) premiers 2 et 5 divise $(x -1)^2$ par conséquent 2 divise $|x-1|$ et 5 divise $|x-1|$

De plus 2x5 = 10 alors 10 divise $|x-1|$ (car $2\wedge 5 = 1$)

Ainsi $x-1 \equiv 0(\mathrm{mod}10)$ ou encore $x \equiv 1(\mathrm{mod}10)$.

4) Soit $q \in Z$

Montrons, par récurrence, que :

Pour tout $n \in IN$, $(1+10q)^n \equiv (1+10nq)(\mathrm{mod}100)$

- Pour n = 0, $(1+10q)^0 = 1 = 1+10\times 0\times q$ d'où
  $$(1+10q)^0 \equiv (1+10\times 0\times q)(\mathrm{mod}100).$$
- Soit $n \in IN$. Supposons que $(1+10q)^n \equiv (1+10nq)(\mathrm{mod}100)$ et montrons que $(1+10q)^{n+1} \equiv (1+10(n+1)q)(\mathrm{mod}100)$
  $$(1+10q)^{n+1} = (1+10q)(1+10q)^n \equiv (1+10q)(1+10nq)(\mathrm{mod}100)$$
  $$\equiv 1+10q+10nq+100nq^2(\mathrm{mod}100).$$
  $$\equiv 1+10(n+1)q(\mathrm{mod}100)$$

Conclusion : Pour tout n∈IN, $(1+10q)^n \equiv (1+10nq)(\text{mod}100)$

5) D'après 3) b/, Si x∈E alors $x = 10q+1\ (q \in \mathbb{Z})$.

La réciproque est assurée par la question 4).

En effet : $x^n = (1+10q)^n \equiv (1+10nq)(\text{mod}100)$

sig $x^n \equiv (1+n(1+10q-1))(\text{mod}100)$

sig $x^n \equiv (1+n(x-1))(\text{mod}100)$.

Conclusion : $E = \{10q+1, q \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 3 :

1) a/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\ln x}{x} = -\infty$ donc la droite x = 0 est une asymptote à (ζ).

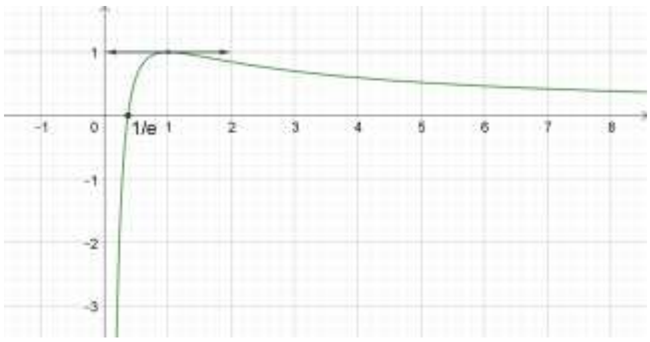
$\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc la droite y = 0 est une asymptote à (ζ) au voisinage de (+∞).

b/ Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)x - (1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

c/

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	
φ	$-\infty$	↗	1	↘	0

d/ $\varphi(x) = 0$ sig $x = \dfrac{1}{e}$.

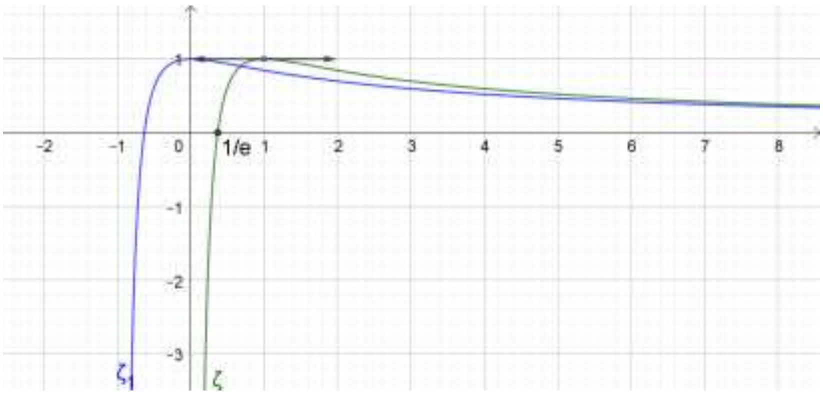


2/ a/ $n \in \mathbb{IN}^*$. $\varphi_n(x) = \dfrac{1+\ln(x+n)}{x+n}$; $x \in]-n,+\infty[$

Pour tout $x \in]-n,+\infty[$, $\varphi_n(x) = \dfrac{1+\ln(x+n)}{x+n} = \varphi(x+n)$ avec $x+n \in]0,+\infty[$ donc $N(x,\varphi_n(x)) \in (\zeta_n)$ ssi $M(x+n,\varphi(x+n)) \in (\zeta_n)$

et comme $\varphi_n(x)=\varphi(x+n)$ alors $\overrightarrow{MN}=-n\vec{i}$ c'est-à-dire que (ζ_n) est l'image de (ζ) par la translation de vecteur $-n\vec{i}$.

b/ (ζ_1) est l'image de (ζ) par la translation de vecteur $-\vec{i}$.



3) a/ $h_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi(x)$; $x\in]0,+\infty[$.

Soit $x\geq 1$. $h_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi(x)=\varphi(x+n)-\varphi(x)$ et comme $x+n>x\geq 1$ et que φ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ alors $h_n(x)<0$.

b/ Soit $x\in]0,1]$. $h_n'(x)=\varphi'(x+n)-\varphi'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{\ln(x+n)}{(x+n)^2}$

Comme $x\in]0,1]$ et que $x+n>1$ alors $\ln x\leq 0$ et $\ln(x+n)>0$ d'où $h_n'(x)<0$

c/ * Sur $[1,+\infty[$, $h_n(x)<0$ donc l'équation $h_n(x)=0$ n'admet aucune solution.

* h_n est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$, donc elle réalise une bijection de $]0,1]$ sur $h_n(]0,1])=[h_n(1),+\infty[$ et comme $h_n(1)<0$ **(3)a/)** alors l'équation $h_n(x)=0$ admet une solution unique α_n dans $]0,1]$.

Il reste à vérifier que $\frac{1}{e}<\alpha_n<1$.

On a : $h_n(1)<0$, il suffira alors de vérifier que $h_n\left(\frac{1}{e}\right)>0$

$$h_n\left(\frac{1}{e}\right)=\varphi_n\left(\frac{1}{e}\right)-\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=\varphi_n\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1+\ln\left(\frac{1}{e}+n\right)}{\frac{1}{e}+n}>0 \text{ (car } \frac{1}{e}+n>1)$$

4) a/ $\frac{1}{e}<\alpha_n<1$ et $\frac{1}{e}<\alpha_{n+1}<1$ donc $1+\frac{1}{e}<1+\alpha_{n+1}<2$.

Ainsi, $1+\alpha_{n+1}>1+\frac{1}{e}>1$ et comme $\alpha_n<1$ alors $1+\alpha_{n+1}>\alpha_n$ et par suite $n+1+\alpha_{n+1}>n+\alpha_n$.

b/ $n+1+\alpha_{n+1} > n+\alpha_n > 1$ et φ est décroissante sur $[1,+\infty[$ donc

$\varphi(n+1+\alpha_{n+1}) < \varphi(n+\alpha_n)$ (1)

Comme $\varphi(x+n) = \varphi_n(x)$ alors $\varphi(n+1+\alpha_{n+1}) = \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1})$ et

$\varphi(n+\alpha_n) = \varphi_n(\alpha_n)$ donc l'inégalité (1) s'écrit : $\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) < \varphi_n(\alpha_n)$ (2)

D'autre part, $h_n(\alpha_n) = \varphi_n(\alpha_n) - \varphi(\alpha_n) = 0$ alors $\varphi_n(\alpha_n) = \varphi(\alpha_n)$ et aussi

$\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \varphi(\alpha_{n+1})$ et par suite l'inégalé (2) s'écrit : $\varphi(\alpha_{n+1}) < \varphi(\alpha_n)$.

c/ $\varphi(\alpha_{n+1}) < \varphi(\alpha_n)$, les termes de la suite (α_n) sont dans $]0,1]$ et la fonction φ est strictement croissante sur cet intervalle donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

La suite (α_n) est ainsi décroissante et minorée par $\frac{1}{e}$ alors elle va converger vers une limite l

d/ $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1$ donc $-1 < \ln(\alpha_n) < 0$ d'où $0 < 1+\ln(\alpha_n) < 1$

Par suite $0 < \varphi(\alpha_n) < \frac{1}{n}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$.

On pose $\beta_n = \varphi(\alpha_n)$.

La fonction φ réalise une bijection de $\left]\frac{1}{e},1\right[$ sur $]0,1[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{-1}(\beta_n) = \varphi^{-1}(0) = \frac{1}{e}$.

Autrement :

$(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\alpha_n) = +\infty$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n+\alpha_n) = 0$

De l'égalité $\varphi(n+\alpha_n) = \varphi(\alpha_n)$ on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n) = L$

Comme $L > \frac{1}{e}$ (car $\alpha_n > \frac{1}{e}$) alors φ est continue en L

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = \varphi(L) = 0$. Par suite $\varphi(L) = 0$ sig $L = \frac{1}{e}$

Exercice 4 :

1) a/ $F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}}dt$ et $H(x) = \frac{4}{e} - 2(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$. $x \in [0,+\infty[$.

$t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $1 \in [0,+\infty[$ donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $F'(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

b/ La fonction H est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$H'(x)=-2\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)e^{-\sqrt{x}}\right]=e^{-\sqrt{x}}.$$

F et H sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et on a $F'(x)=H'(x)$ et comme F(1) = H(1) = 0 alors F(x) = H(x) pour tout $x\in\,]0,+\infty[$

c/ Les fonctions F et H coïncident sur $]0,+\infty[$ et sont continues à droite en zéro, donc on a : $F(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}H(x)=H(0)$

2) a/ $G(x)=\int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}dt$ **;** $x\in[0,+\infty[$.

Soit $x>0$. $G(x)=\int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}dt=\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}dt=2\int_1^x t\times\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\right)dt$

On pose : $U(t)=t\to U'(t)=1$

$$V'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\to V(t)=-e^{-\sqrt{t}}$$

$$G(x)=2\left[-te^{-\sqrt{t}}\right]_1^x+2\int_1^x e^{-\sqrt{t}}dt=2\left(\frac{1}{e}-xe^{-\sqrt{x}}\right)+2F(x)=\frac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$$

b/ $G(x)=\frac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$ pour tout $x>0$.

La fonction $x\mapsto\frac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$

$$G(0)=\lim_{x\to 0^+}G(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{e}-2xe^{\sqrt{x}}+2F(x)\right)=\frac{2}{e}+2F(0)$$

3) a/ $f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$

Soit $\lambda\geq 1$.

$$\mathcal{A}_1=\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}dx-\int_0^1\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx$$

$$=-\int_1^0 e^{-\sqrt{x}}dx+\int_1^0\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx$$

$$=-F(0)+G(0)=\frac{2}{e}+F(0)=\frac{2}{e}+H(0)=\frac{2}{e}+\frac{4}{e}-2=\frac{6}{e}-2$$

b/ Soit $\lambda>1$.

$$\mathcal{A}_\lambda=\int_0^\lambda\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^1\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_1^\lambda\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$\mathcal{A}_\lambda=\mathcal{A}_1+\int_1^\lambda\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx-\int_1^\lambda e^{-\sqrt{x}}dx=\mathcal{A}_1+G(\lambda)-F(\lambda).$$

c/ D'après 2) a/ on a :

$$G(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x) \text{ donc } G(x) - F(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + F(x)$$

$(x > 0)$

D'où $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} G(\lambda) - F(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{2}{e} - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + F(\lambda)$

Comme $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} H(\lambda) = \frac{4}{e}$ alors

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} G(\lambda) - F(\lambda) = \frac{6}{e}$ et par suite $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda = \frac{12}{e} - 2$