RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session principale
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

*****

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte quatre pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5.5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure de l'annexe jointe, $OABC$ est un rectangle de centre I tel que $OC = 1$, $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et D le point du segment $[OA]$ tel que $OD = OC$.

1) **a/** Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur I et D sur B.

b/ Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

c/ On note Ω le centre de f. Construire Ω.

2) Soit g l'antidéplacement qui envoie O sur I et D sur B.

a/ Montrer que g est une symétrie glissante.

b/ Soit J le milieu du segment $[OI]$ et K le milieu du segment $[BD]$.
Les droites (JK) et (OA) se coupent au point E.
Montrer que $g(E) = J$.

c/ En déduire que $g = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{EJ}}$.

3) **a/** Montrer que $f^{-1} \circ g = S_{(OA)}$. En déduire que $f(E) = J$.

b/ Comparer OE et OJ. En déduire que les droites $(O\Omega)$ et (JK) sont perpendiculaires.

Dans la suite, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC})$.
On note z_I, z_J et z_K les affixes respectives des points I, J et K.

4) **a/** Justifier que $z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b/ Montrer que $z_K - z_J = \cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c/ Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK})$.

5) Soit M un point de la droite (JK). On désigne par N le symétrique de M par rapport à (OA) et par P l'image de M par g.

a/ Soit r la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
Montrer que $r(M) = N$.

b/ En déduire que $f(N) = P$.

Exercice 2 (4 points)

1) a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $21^n \equiv 1 + 20n \ (mod\ 100)$.

b/ En déduire les deux derniers chiffres de l'entier 2021^{2021}.

On note E l'ensemble des entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n \equiv 1 + n(x-1) \ (mod\ 100).$$

2) Vérifier que 21 est un élément de E.

3) Soit x un élément de E.

a/ Montrer que $(x-1)^2 \equiv 0 \ (mod\ 100)$.

b/ En déduire que $x \equiv 1 \ (mod\ 10)$.

4) Soit $q \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + 10\,q)^n \equiv 1 + 10\,nq \ (mod\ 100)$.

5) Déterminer l'ensemble E.

Exercice 3 (6 points)

1) Soit φ la fonction définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par $\varphi(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a/ Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b/ Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

c/ Dresser le tableau de variation de φ.

d/ Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

2) Soit φ_n la fonction définie sur $]\,-n, +\infty\,[$ par $\varphi_n(x) = \dfrac{1 + \ln(x+n)}{x+n}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ En remarquant que $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$, montrer que $(\mathscr{C}_n)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par une translation que l'on précisera.

b/ Tracer $(\mathscr{C}_1)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Soit h_n la fonction définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$.

a/ Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $h_n(x) < 0$.

b/ Montrer que pour tout x de $]\,0, 1\,]$, $h'_n(x) < 0$.

c/ En déduire que l'équation $h_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]\,0, +\infty\,[$ une unique solution α_n et vérifier que $\dfrac{1}{e} < \alpha_n < 1$.

4) a/ Montrer que $n + 1 + \alpha_{n+1} > n + \alpha_n$.

b/ Comparer $\varphi(\alpha_{n+1})$ et $\varphi(\alpha_n)$.

c/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

d/ Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 (4.5 points)

1) Soit F et H les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_1^x e^{-\sqrt{t}}dt \quad \text{et} \quad H(x)=\frac{4}{e}-2\,(\,1+\sqrt{x}\,)\,e^{-\sqrt{x}}.$$

a/ Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donner $F'(x)$.

b/ Montrer que pour tout $x>0$, $F(x)=H(x)$.

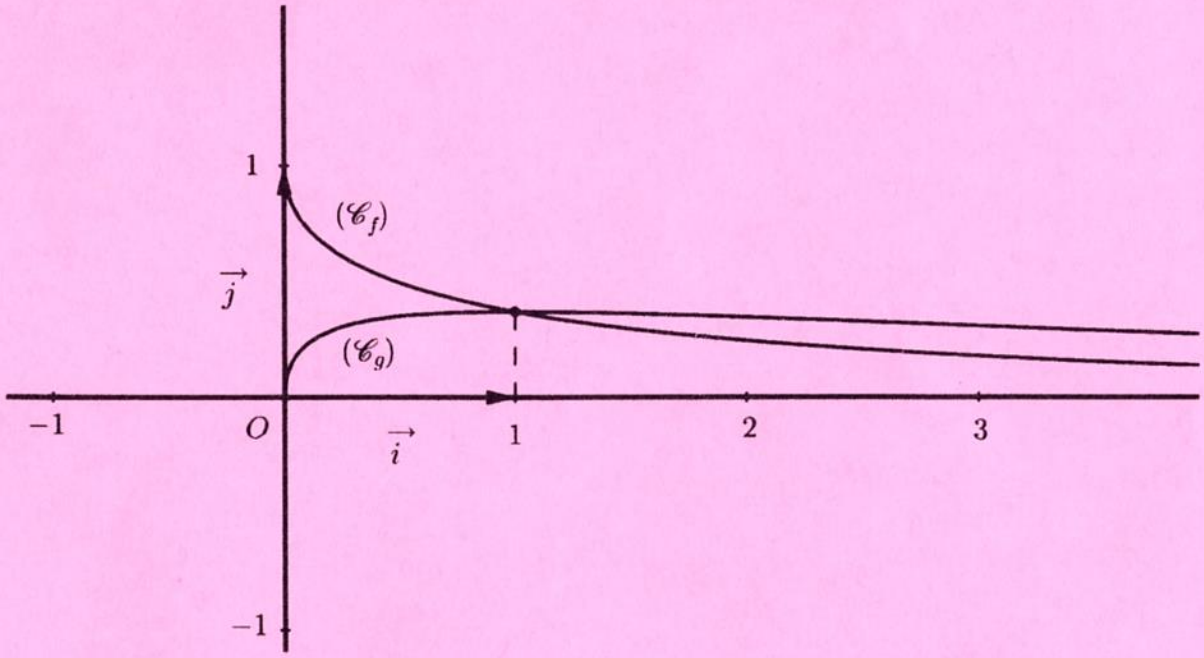
c/ En déduire que $F(0)=H(0)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x)=\int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}dt$.

a/ En remarquant que pour tout $t>0$, $\sqrt{t}=\dfrac{t}{\sqrt{t}}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que $G(x)=\dfrac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$, pour tout $x>0$.

b/ Justifier que $G(0)=\dfrac{2}{e}+2F(0)$.

3) Ci-dessous on a tracé , dans un repère orthonormé, les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ des fonctions f et g définies sur $[0,+\infty\,[$ par $f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$.



Pour tout $\lambda \geqslant 1$, on désigne par $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$.

a/ Montrer que $\mathscr{A}_1=\dfrac{6}{e}-2$.

b/ Montrer que pour tout $\lambda>1$, $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}_1 + G(\lambda) - F(\lambda)$.

c/ Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}_\lambda$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2021)
Annexe à rendre avec la copie