MATHÉMATIQUES
Section : Sciences Techniques
Session de contrôle 2021

Exercice N°1 :

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse Exacte	**a)**	**b)**	**c)**	**a)**

Exercice N°2 :

1) a/ La fonction f est dérivable sur IR (somme de deux fonctions dérivables)

$$f'(x) = a - \frac{4e^x(e^x+3) - 4e^x.e^x}{(e^x+3)^2} = a - \frac{12e^x}{(e^x+3)^2}$$

b/ A est un point de la courbe (ζ) alors f(ln3) = ln3 d'où (aln3 + b - 2 = ln 3)
La courbe (ζ) admet une tangente horizontale au point A donc f '(ln3) = 0,
d'où (a – 1) = 0 et par suite <u>a = 1.</u>
a = 1 donc ln3 + b - 2 = ln 3 et par suite <u>b = 2</u>

c/ On a : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3}$

$$x - 2 + \frac{12}{e^x+3} = x + 2 - 4 + \frac{12}{e^x+3} = x + 2 + \frac{12 - 4(e^x+3)}{e^x+3} = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} = f(x)$$

2) a/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-2) + \frac{12}{(e^x+3)} = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - (x+2)\right] = \lim_{x\to-\infty} -4 + \frac{12}{(e^x+3)} = -4 + \frac{12}{3} = 0$$

La droite d'équation y = x + 2 est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $(-\infty)$.

b/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) + \frac{12}{(e^x+3)} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x-2)\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{12}{(e^x+3)} = 0$$

La droite d'équation y = x + 2 est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $(+\infty)$.

3) a/ Pour tout $x \in IR$ on a :

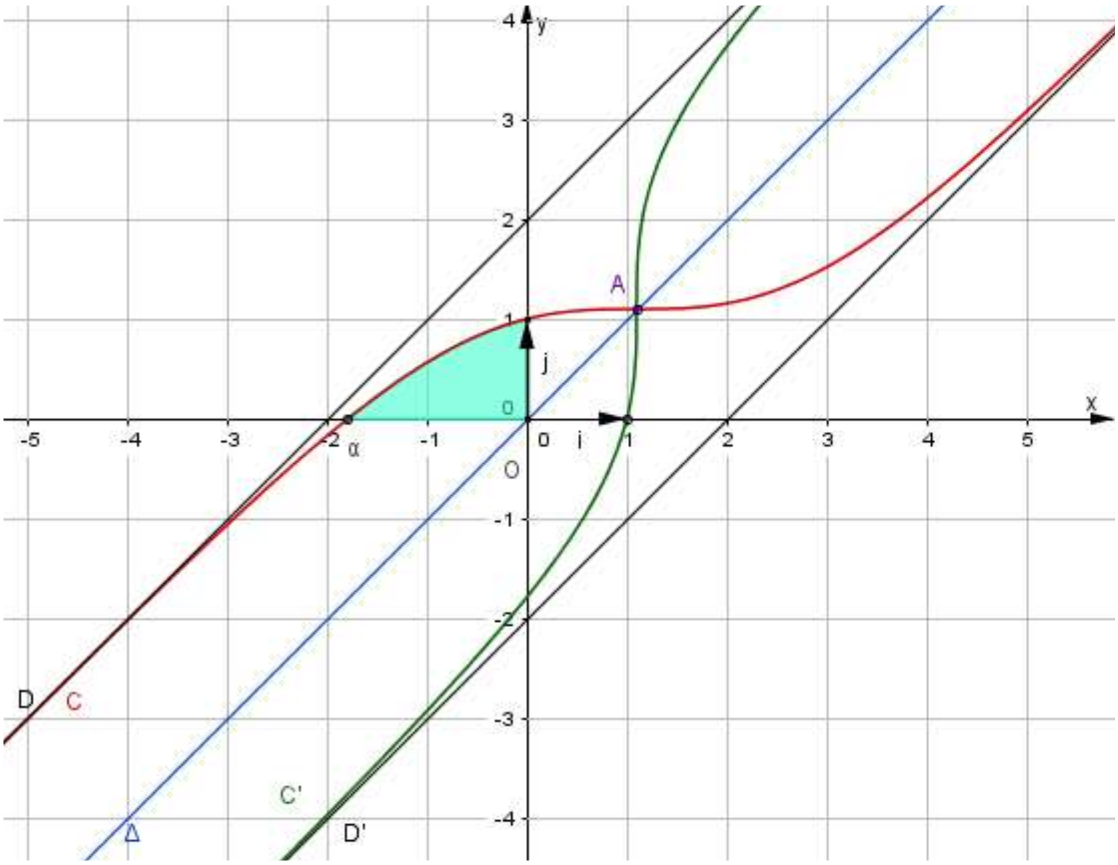
$$f'(x) = 1 - \frac{12e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{e^{2x} + 6e^x + 9 - 12e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2} = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

b/ On a $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \geq 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

f est continue et strictement croissante sur IR et f(IR) = IR
Alors f réalise une bijection de IR sur IR

c/ f réalise une bijection de IR sur IR et $0\in$IR donc il existe un unique réel α tel que $f(\alpha)=0$.
On a : $f(-1{,}8)\cong 0{,}0089$ et $f(-1{,}7)\cong 0{,}07$
$f(-1{,}8)\times f(-1{,}7)<0$, donc $-1{,}8<\alpha<-1{,}7$ (Théorème des valeurs intermédiaires)

4) a/



b/ Par raison de symétrie par rapport à la droite $\Delta : y = x$

$$\mathcal{A}=\int_0^1\left|f^{-1}(x)\right|dx=\int_\alpha^0 f(x)dx=\int_\alpha^0\left(x+2-\frac{4e^x}{3+e^x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-4\ln(3+e^x)\right]_\alpha^0$$

$$\mathcal{A}==-4\ln 4-\frac{1}{2}\alpha^2-2\alpha+4\ln(3+e^\alpha)$$

Comme on a : $f(\alpha)=0$ alors $3+e^\alpha=\dfrac{12}{2-\alpha}$

$$\text{D'où } \mathcal{A} = -4\ln 4 - \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 4\ln\left(\frac{12}{2-\alpha}\right) = -4\ln 4 - \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 4\ln 12 - 4\ln(2-\alpha)$$

$$= 4(\ln 12 - \ln 4 - \ln(2-\alpha)) - \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha = 4(\ln 3 - \ln(2-\alpha)) - \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha$$

$$\text{Par suite } \mathcal{A} = 4\ln\left(\frac{3}{2-\alpha}\right) - \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha$$

<u>Exercice N°3 :</u>

I. 1) On a : $\left(4e^{i\frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 16e^{i\frac{\pi}{2}} + 16\sqrt{2}e^{i0} + 8e^{-i\frac{\pi}{2}} = 16i + 16\sqrt{2} - 8i = 16\sqrt{2} + 8i$

2) (E) : $z^2 - (4e^{i\frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})z + 4\sqrt{2} - 2i = 0$

$$\Delta = \left(4e^{i\frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2 - 4.(4\sqrt{2} - 2i = 16\sqrt{2} + 8i - 16\sqrt{2} + 8i = 16i = (4e^{i\frac{\pi}{4}})^2$$

$$z_1 = \frac{4e^{i\frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} - 4e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i \text{ et}$$

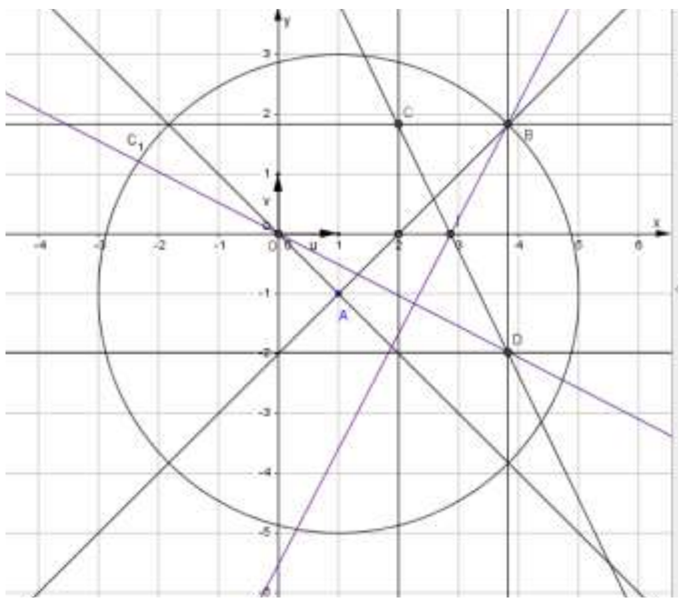
$$z_2 = \frac{4e^{i\frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} + 4e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = \frac{8e^{i\frac{\pi}{4}} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 - i = (1 + 2\sqrt{2}) + i(2\sqrt{2} - 1)$$

$S_C = \{z_1 , z_2\}$.

II. 1) a) $AB = |z_B - z_A| = |2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}\text{x}\sqrt{2} = 4$ donc $B \in (C)$

b) $\frac{z_B - z_A}{z_A} = \frac{2\sqrt{2} + 2i}{1 - i} = \frac{(2\sqrt{2} + 2i)\text{x}(1+i)}{2} = 2\sqrt{2}i \in iIR$

c) On a $(OA) \perp (AB)$.



2) a) $$\frac{z_D - z_C}{z_B} = \frac{1+2\sqrt{2}-2i-2-i(2\sqrt{2}-1)}{1+2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2}-1)} = \frac{2\sqrt{2}-1-i(2\sqrt{2}+1)}{1+2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{-i\left[1+2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2}-1)\right]}{1+2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2}-1)} = -i$$

b) On a $\frac{z_D - z_C}{z_B} = -i \in i\mathbb{R}$ donc (DC) $\perp$ (OB)

(DC) porte la hauteur issue de D dans le triangle ODC.

$(O,\vec{u})$ porte la hauteur issue de O

Comme $(O,\vec{u}) \cap (DC) = \{I\}$ alors I est l'orthocentre du triangle ODC

D'où (BI) porte la hauteur issue du point B

Par suite (BI) $\perp$ (OD)

<u>Exercice N°4 :</u>

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et , $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C déterminent un plan P.

2) a) $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P ssi $\begin{cases}\vec{n} \neq \vec{0}\\ \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}\vec{n} \neq \vec{0}\\ a - 2c = 0\\ a + b = 0\end{cases}$

ssi $\begin{cases}\vec{n} \neq \vec{0}\\ a = 2c\\ b = -a = -2c\end{cases}$

b) Soit c = 1 alors $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P donc P : 2x – 2y +z + d = 0

On a : A(0, 0, 1)$\in$P donc 1 + d = 0 sig d = – 1

Par suite P : 2x – 2y + z – 1 = 0

c) On a : 2x(0) – 2x(0) + 0 – 1 = - 1 $\neq$ 0 donc O$\notin$P.

3) a) On a : I = O $*$ B donc $I\left(\frac{0+1}{2},\frac{0+0}{2},\frac{0-1}{2}\right)$ d'où $I\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$

On a : G le centre de gravité du triangle OAC donc $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

D'où $G\left(\frac{0+0+1}{3},\frac{0+0+1}{3},\frac{0+1+1}{3}\right)$ par suite $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

b) On a $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{7}{6}\end{pmatrix}$

Soit $\Delta:\begin{cases}x=\frac{1}{2}-\alpha\\ y=2\alpha & \alpha\in IR\\ z=-\frac{1}{2}+7\alpha\end{cases}$

Δ est la droite passant par le point $\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$

On a et $I\in\Delta$ et $\vec{u}=6x\overrightarrow{IG}$ ($\vec{u}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont colinéaires), Par suite Δ = (IG)

c) On a : $\vec{n}.\overrightarrow{IG}=2\times(-1)-2\times2+7\times1=1\neq0$

Alors la droite (IG) coupe le plan P en un point D

$D(\frac{1}{2}-\alpha,\ 2\alpha,\ -\frac{1}{2}+7\alpha)\in P$ sig $2(\frac{1}{2}-\alpha)-2(2\alpha)-\frac{1}{2}+7\alpha-1=0$ sig $\alpha=\frac{1}{2}$

Le point D a pour coordonnées (0, 1, 3).

d) On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme