MATHÉMATIQUES
Section : Sciences Expérimentales
Session de contrôle 2021

Exercice 1 :

1) Soient les évènements :
D : « La personne est diabétique » et H : « La personne est atteinte par une hépatite »
On sait que : $p(D)=0,15$; $p(H)=0,05$ et que $p(D\cap H)=0,03$.
$p(D\cup H)=p(D)+p(H)-p(D\cap H)=0,17$.
La réponse **b)** est correcte.

2) $p(H/D)=\dfrac{p(D\cap H)}{p(D)}=\dfrac{0,03}{0,15}=0,2$.
La réponse **c)** est correcte.

3) $p(B, A, C)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$.
La réponse **a)** est correcte.

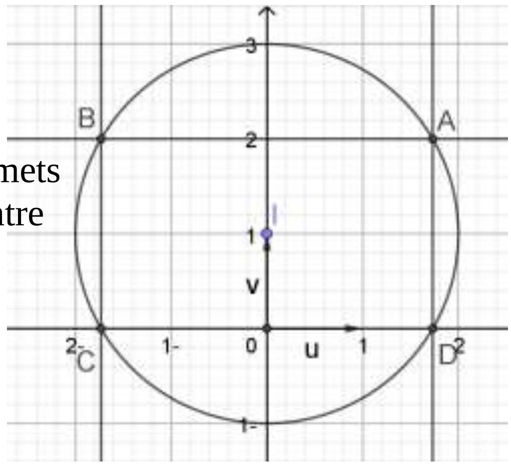
4) $p(A\ \geq\ 1)=1-p(A=0)=1-C_3^0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$.
La réponse **c)** est correcte.

Exercice 2 :

1) a) $\sqrt{3}^2-2i\sqrt{3}+\left(-3+2i\sqrt{3}\right)=3-2i\sqrt{3}-3+2i\sqrt{3}=0$ donc $\sqrt{3}$ est solution de (E).
b) La deuxième racine z_2 doit satisfaire l'égalité $z_2+\sqrt{3}=2i$ donc $z_2=-\sqrt{3}+2i$

2) a) $AC=|z_C-z_A|=\left|-\sqrt{3}-\sqrt{3}-2i\right|=\left|-2\sqrt{3}-2i\right|=4$.
$BD=|z_D-z_B|=\left|\sqrt{3}+\sqrt{3}-2i\right|=\left|2\sqrt{3}-2i\right|=4$ donc $AC=BD=4$.
b) $Z_{\overrightarrow{AB}}=Z_B-Z_A=-\sqrt{3}+2i-\sqrt{3}-2i=-2\sqrt{3}=Z_{\overrightarrow{DC}}$.
Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et ses diagonales sont isométriques donc c'est un rectangle.

3) a) $\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{2i}{2}=z_I$ donc I est le centre du rectangle $ABCD$ et comme ses diagonales ont pour longueur 4 alors ses sommets A, B, C et D appartiennent au cercle de centre Le point I et de rayon 2.



b)
c) $\mathcal{A}_{ABCD}=AB\times AD=2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$ u.a

Exercice 3 :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \text{ pour tout } x \in]-1, +\infty[.$$

A) 1. a) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe (ζ)

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underset{\to 0}{\frac{1}{x+1}} + \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{\to 0} \times \underset{\to 1}{\frac{x+1}{x}} = 0$ donc la courbe (ζ) admet au voisinage de plus l'infini une branche parabolique de direction celle de la droite des abscisses.

2. a) $f'(x) = \frac{1(x+1) - x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$.

b) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $f'(x) > 0$.

x	-1 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

c) f est continue et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $f(]-1, +\infty[) = IR$.

B) 1. a) $g(x) = f(x) - x$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

g est strictement croissante sur $\left]-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ et $-1 < 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc $g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) > g(0) = 0$.

b) Les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $]-1, +\infty[$.

La restriction de g à l'intervalle $\left]-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image et comme $g(0) = 0$ alors la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ ou encore $f(x) = x$ est 0.

La restriction de g à l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right[$ est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image

$\left]-\infty, g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]$ et comme $0 \in \left]-\infty, g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]$ alors l'équation $g(x) = 0$ ou encore $f(x) = x$ est admet dans $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty\right[$ une solution unique α.

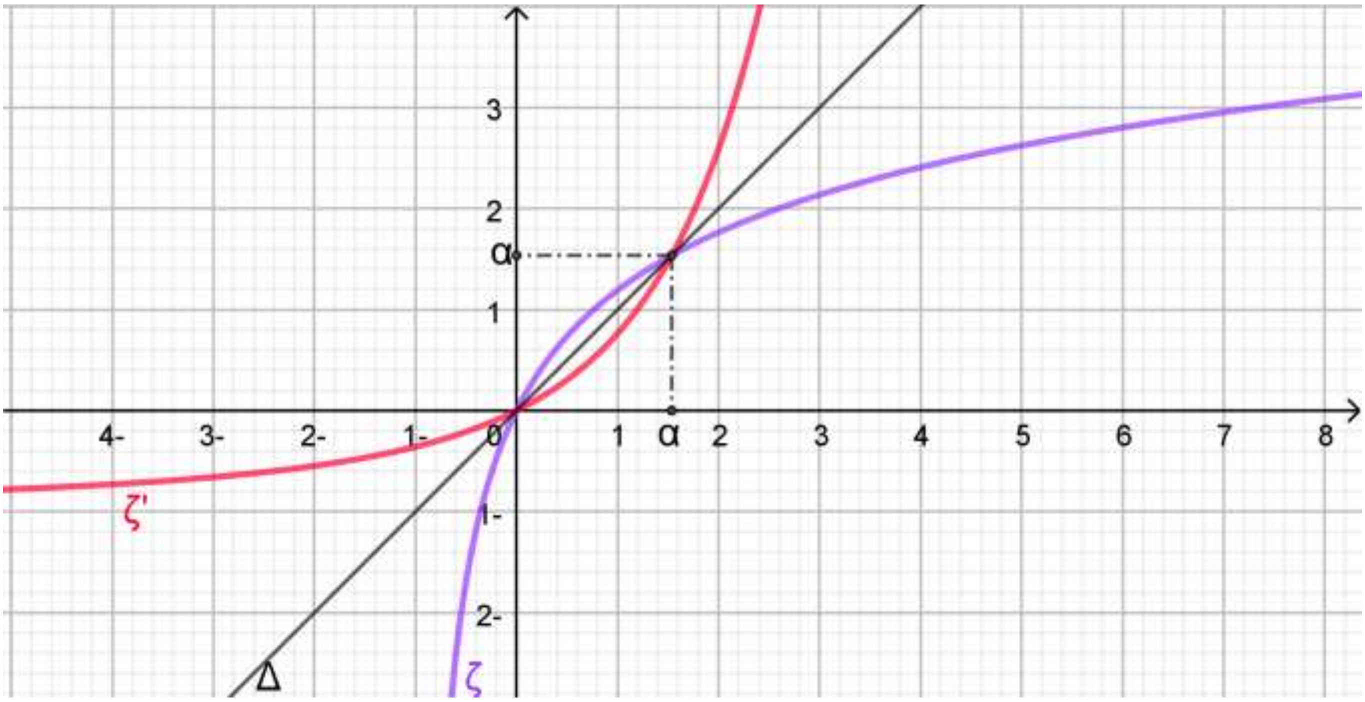
Conclusion : L'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1, +\infty[$ deux solutions 0 et α.

c) Comme $g(1{,}5) \approx 0{,}02 > 0$ et $g(1{,}6) \approx -0{,}03 < 0$ alors $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$

d)

x	-1		0		α		$+\infty$
$f(x) - x$			0		0		
Position		ζ au-dessous de Δ	$\zeta \cap \Delta = \{(0,0)\}$	ζ au-dessus de Δ	$\zeta \cap \Delta = \{(\alpha,\alpha)\}$	ζ au-dessous de Δ	

2. a) et b)



3) Pour des raisons de symétrie,

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2\int_0^{\alpha}(f(x) - x)dx = 2\int_0^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) - x\right)dx = 2\left[\frac{-x^2}{2} + x - \ln(x+1)\right]_0^{\alpha} + 2J$$

avec $J = \int_0^{\alpha}\ln(x+1)dx$

On pose $U(x) = \ln(x+1) \to U'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$V'(x) = 1 \to V(x) = x$

$$J = \left[x\ln(x+1)\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha}\frac{x}{x+1}dx = \alpha\ln(\alpha+1) - \int_0^{\alpha}1 - \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \alpha\ln(\alpha+1) - \left[x - \ln(x+1)\right]_0^{\alpha} = (1+\alpha)\ln(\alpha+1) - \alpha$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = -\alpha^2 + 2\alpha - 2\ln(\alpha+1) + 2(1+\alpha)\ln(\alpha+1) - 2\alpha$$

$$= -\alpha^2 - 2\ln(\alpha+1) + 2(1+\alpha)\ln(\alpha+1) = 2\alpha\ln(\alpha+1) - \alpha^2$$

Exercice 4 :

1) $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ et $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$. $x \in [1, +\infty[$.

$G(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$ et $H(x) = \ln\left[x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right]$. $x \in [1, +\infty[$.

On a : $G'(x) = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = g(x)$ donc G est une primitive de g sur $[1, +\infty[$.

$$\text{On a : } H'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1+\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1+\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$= \frac{\dfrac{x-1+\sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x-1+\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = h(x)$$

Par suite, H est une primitive de h sur $[1, +\infty[$.

2) $I = \int_1^2 h(x)\,dx = H(2) - H(1) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

3) a) $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx$ et $K = \displaystyle\int_1^2 G(x)\,dx$

$$I + J = \int_1^2\left(\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right)dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx = \int_1^2\sqrt{x^2-2x+2}\,dx = K$$

b) $J = \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}\,dx = \int_1^2 (x-1)\frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}\,dx$

On pose : $U(x) = x - 1 \rightarrow U'(x) = 1$

$$V'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \rightarrow V(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$J = \left[(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}\right]_1^2 - \int_1^2 \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,dx = \sqrt{2} - K$$

c) $J = \sqrt{2} - K = \sqrt{2} - I - J$ donc $J = \frac{\sqrt{2} - I}{2} = \frac{\sqrt{2} - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2}$