MATHÉMATIQUES

Section : Sciences de l'informatique

Session de contrôle 2021

Exercice 1 :

1) a) $\left(\sqrt{3}\text{-i}\right)^2=\sqrt{3}^2\text{-}2\times\sqrt{3}\times\text{i}+\text{i}^2=3\text{-}2\sqrt{3}\ \text{i}\text{-}1=2\text{-}2\ \text{i}\sqrt{3}$

Donc $\left(\sqrt{3}-\text{i}\right)^2=2-2\ \text{i}\sqrt{3}$

b) $\Delta=\left[-\left(\sqrt{3}+3\ \text{i}\right)\right]^2-4\times1\times\left(-2+2\ \text{i}\sqrt{3}\right)$

$=\left(\sqrt{3}+3\ \text{i}\right)^2+8-8\ \text{i}\sqrt{3}\qquad=3+6\ \text{i}\sqrt{3}-9+8-8\ \text{i}\sqrt{3}$

$=2-2\ \text{i}\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-\text{i}\right)^2$

Donc $\delta=\sqrt{3}-\text{i}$ une racine carrée de Δ

D'où $Z_1=\frac{\left(\sqrt{3}+3\ \text{i}\right)-\left(\sqrt{3}-\text{i}\right)}{2}$ et $Z_2=\frac{\left(\sqrt{3}+3\ \text{i}\right)+\left(\sqrt{3}-\text{i}\right)}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}+3\ \text{i}-\sqrt{3}+\text{i}}{2}$ $\qquad=\frac{\sqrt{3}+3\ \text{i}+\sqrt{3}-\text{i}}{2}$

$=2\ \text{i}$ $\qquad=\sqrt{3}+\text{i}$

Ainsi $S_{\mathbb{C}}=\left\{\ (2\ \text{i})\ ;\ \left(\sqrt{3}+\text{i}\right)\ \right\}$

2) a) $\overline{Z_C}\ \times\ (Z_B-Z_A)=\overline{\left(2\text{i}+\sqrt{3}+\text{i}\right)}\ \times\ \left(\sqrt{3}+\text{i}-2\ \text{i}\right)$

$=\overline{\left(\sqrt{3}+3\ \text{i}\right)}\ \times\ \left(\sqrt{3}-\ \text{i}\right)=\left(\sqrt{3}-3\text{i}\right)\ \times\ \left(\sqrt{3}-\ \text{i}\right)$

$=3-\sqrt{3}\ \text{i}-3\sqrt{3}\ \text{i}-3=-4\ \text{i}\sqrt{3}$

b) $OA=|Z_A-Z_O|=|2\text{i}|=2$

$OB=|Z_B-Z_O|=\left|\sqrt{3}+\ \text{i}\right|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Donc $OA=OB=2$

D'où les points A et B appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 2.

c) $Z_A=2\ \text{i}$ donc $A\in(O,\vec{v})$

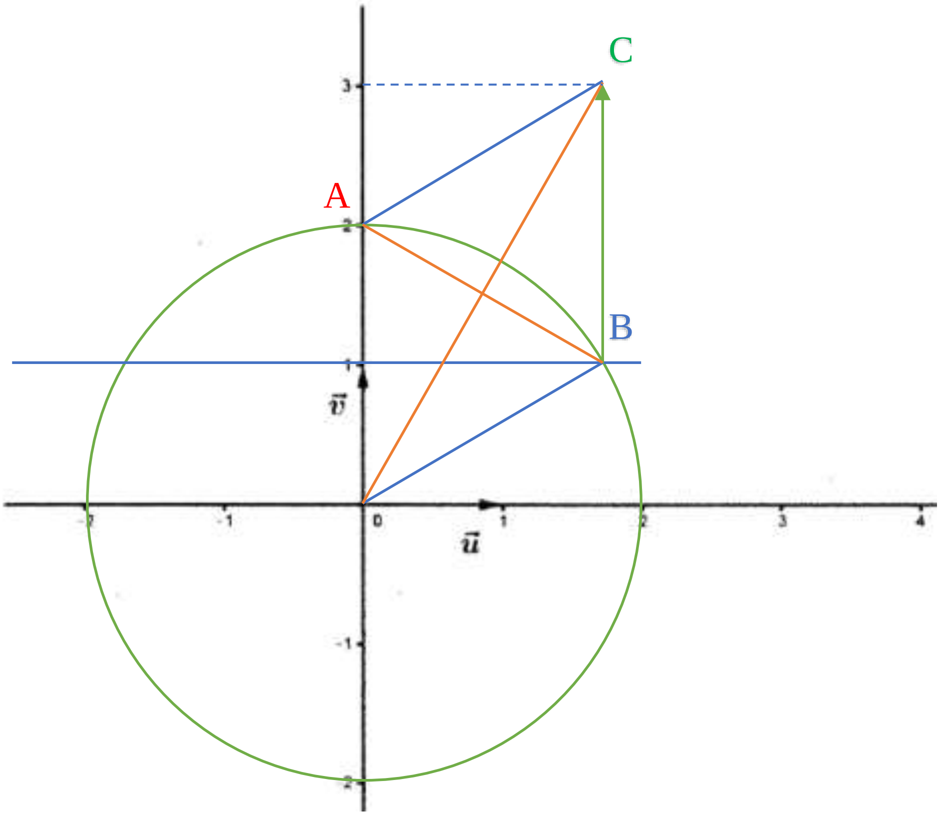
$Z_B=\sqrt{3}+\text{i}$ donc $\text{Im}(Z_B)=1$, d'où $B\in\Delta:y=1$

Or $B\in\Gamma$ donc $B\in\Delta\cap\Gamma$ avec $\text{Ré}(Z_B)>0$

$Z_C=Z_A+Z_B=2\text{i}+\sqrt{3}+\text{i}=\sqrt{3}+3\ \text{i}$

$\text{Ré}(Z_C)=\text{Ré}(Z_B)$ et $\text{Im}(Z_C)=3$

Figure 1 **Annexe à rendre**



d) $Z_C = Z_A + Z_B$ alors $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Donc OACB est un parallélogramme

Or $OA = OB$ d'où OACB est un losange

3) $|Z - 2\,i| = \left|Z - \sqrt{3} - i\right| \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

$\Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow$ F est la médiatrice du segment [AB]

Or OACB est un losange donc (OC) est la médiatrice du segment [AB]

<u>Exercice 2 :</u>

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}\,U_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}\,U_n + 1 = \frac{1}{2}\,(U_n + 2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}\,(U_n + 2)$

b) On a : $U_0 = 0$ alors $U_0 > -2$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > -2$ et montrons que $U_{n+1} > -2$

On a : $U_n > -2$ alors $\frac{1}{2}\,U_n > -1$ donc $\frac{1}{2}\,U_n - 1 > -2$ d'où $U_{n+1} > -2$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > -2$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n - 1 - U_n$

$$= \frac{U_n - 2 - 2\,U_n}{2} = \frac{-2 - U_n}{2}$$

Or On a : $U_n > -2$ sig $-U_n < 2$ sig $-2 - U_n < 0$ d'où $U_{n+1} - U_n < 0$

Ainsi la suite (U_n) est décroissante.

d) La suite (U_n) est décroissante et minorée par (-2)

Donc elle est convergente ver une limite finie l tel que $l \geq -2$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

f est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue en l

Donc l est une solution de l'équation $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 = x \Leftrightarrow x - 2 = 2x \Leftrightarrow -2 = 2x - x \Leftrightarrow -2 = x$

Donc $l = -2$ Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -2$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$V_{n+1} = Ln(U_{n+1} + 2) = Ln\left(\frac{1}{2}U_n - 1 + 2\right) = Ln\left(\frac{1}{2}U_n + 1\right) = Ln\left(\frac{U_n+2}{2}\right)$$

$$= Ln(U_n + 2) - Ln(2) = V_n + Ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc (V_n) est suite arithmétique de raison $r = Ln\left(\frac{1}{2}\right)$

b) On a : (V_n) est suite arithmétique de raison $r = Ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $V_n = V_0 + n\,r$

Or (V_n) est de raison $r = Ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et premier terme $V_0 = Ln(2)$

Donc pur tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = Ln(2) + n\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= -Ln\left(\frac{1}{2}\right) + n\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= (n-1)\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

c) On a : $V_n = Ln(U_n + 2) \Leftrightarrow Ln(U_n + 2) = (n-1)\,Ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow Ln(U_n + 2) = Ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \Leftrightarrow U_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$

d) $U_n \leq -1{,}99$ sig $2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \leq -1{,}99$

sig $2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 2 - 1{,}99$ sig $2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}01$

sig $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}005$ sig $Ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq Ln(0{,}005)$

sig $\quad n \ \text{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \text{Ln}(0{,}005)$ sig $\quad n \geq \frac{\text{Ln}(0{,}005)}{\text{Ln}(0{,}5)}$

sig $\quad n \geq 7{,}6438561 \ldots.$

A partir de $n = 8$, $U_n \leq -1{,}99$

Exercice 3 :

1) a) $5 \times 2 - 3 \times 3 = 10 - 9 = 1$

Donc le couple $(2, 3)$ est solution de l'équation (E).

b) On a : $5 \wedge 3 = 1$ donc l'équation (E) admet des solutions

(x , y) est une solution de l'équation (E)

$\Leftrightarrow 5x - 3y = 10 \Leftrightarrow 5x - 3y = 5 \times 2 - 3 \times 3$

$\Leftrightarrow 5x - 5 \times 2 = 3y - 3 \times 3 \Leftrightarrow 5(x-2) = 3(y-3)$

$$\left.\begin{array}{c} 3 \text{ divise } 5(x-2) \\ 5 \wedge 3 = 1 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Lemme de Gauss}} 3 \text{ divise } (x-2)$$

$\Rightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $x - 2 = 3k$

$\Rightarrow x = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Or $5(x-2) = 3(y-3)$ alors $5 \times 3k = 3(y-3)$ donc $5k = y - 3$

Donc $y = 5k + 3$

$$5 \times (3k+2) - 3(5k+3) = 15k + 10 - 15k - 9 = 1$$

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{ (3k+2; 5k+3) \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \}$

2) a) On a : $2021 = 5 \times 404 + 1$ donc $2021 \equiv 1 \ [5]$

On a $2021 = 3 \times 673 + 2$ donc $2021 \equiv 2 \ [3]$

D'où 2021 est un élément de S.

b) Le couple (p, q) vérifie $\begin{cases} n = 5p + 1 \\ n = 3q + 2 \end{cases}$ ou n est un élément de S.

$5p + 1 = 3q + 2 \Leftrightarrow 5p - 3q = 1$

Donc le couple (p, q) est solution de l'équation (E).

c) n est un élément de S alors $\begin{cases} n \equiv 1 \ [5] \\ n \equiv 2 \ [3] \end{cases}$

Donc il existe un couple (p, q) vérifie $\begin{cases} n = 5p + 1 \\ n = 3q + 2 \end{cases}$

Donc le couple (p, q) est solution de l'équation (E)

D'où $p = 3k + 2$ et $q = 5k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $n = 5p + 1 = 5\,(3k + 2) + 1 = 15k + 10 + 1 = 15k + 11$

Ainsi $n \equiv 11\ [15]$

3) a) On a : $2021 \equiv 1\ [5]$ donc $2021^{2021} \equiv 1^{2021}\ [5]$

D'où $2021^{2021} \equiv 1\ [5]$

b) On a $2021 \equiv 2\ [3]$ donc $2021^{2} \equiv 4\ [3]$

D'où $2021^{2} \equiv 1\ [3]$

$2021^{2021} \equiv 2021^{2\times1010+1}\ [3]$ donc $2021^{2021} \equiv (2021^{2})^{1010} \times 2021^{1}\ [3]$

donc $2021^{2021} \equiv 1^{1010} \times 2\ [3]$

d'où $2021^{2021} \equiv 2\ [3]$

c) On a $2021^{2021} \equiv 1\ [5]$ et $2021^{2021} \equiv 2\ [3]$

Donc 2021^{2021} est un élément de S

Donc $2021^{2021} \equiv 11\ [15]$

D'où le reste de la division euclidienne de 2021^{2021} est 11

<u>Exercice 4 :</u>

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} - \frac{1}{2}x^{2} = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x}}{x} - \frac{x}{2} = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x}}{x} = 0$)

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $(-\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} - \frac{1}{2}x^{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}\left(\frac{e^{x}}{x^{2}} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{2}} = +\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} - \frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x^{2}} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $(+\infty)$

2) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = e^{x} - x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f''(x) = e^{x} - 1$

b) $e^{x} - 1 \geq 0 \iff e^{x} \geq 1$

$\iff x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$	1	$\nearrow$

f' admet un minimum absolu en 0 égale a 1

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) \geq 1$

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) On a f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-\infty; +\infty[$

Or $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α.

On a : $f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} < 0$

On a : $f(-0{,}8) = e^{-0{,}8} - \frac{1}{2} \times (-0{,}8)^2 > 0$

Donc $-1 < \alpha < -0{,}8$

3) a) La dérivée seconde s'annule et change de signe en 0 et $f(0) = 1$

Donc le point K(0,1) est un point d'inflexion de la courbe (C)

b) Une équation de la tangente à (C) au point K est :$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, donc $T: y = x + 1$ est la tangente à (C) au point K.

4) a) Pour tout $\mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geq 0$ car $f'(x) \geq 1$

D'où la fonction g est croissante

b) $g(0) = f(0) - (0+1) = 1 - 1 = 0$

g est croissante sur $\mathbb{R}$

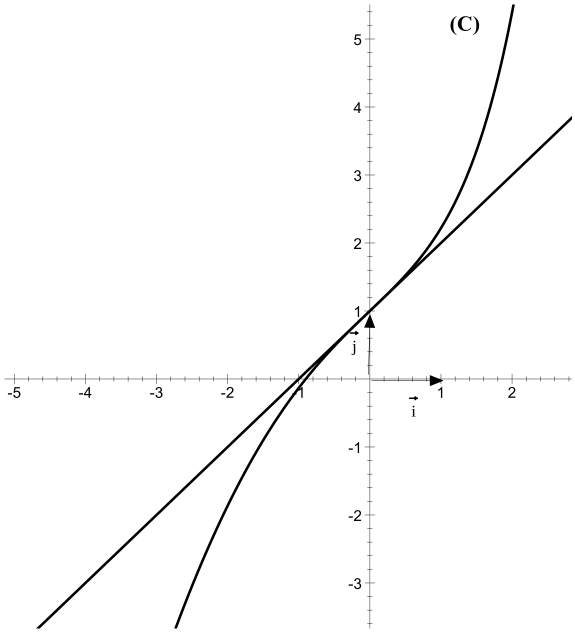
- si $x < 0$ alors $g(x) < g(0)$ donc $g(x) < 0$
- si $0 \leq x$ alors $g(0) \leq g(x)$ donc $0 \leq g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

c)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y = g(x)$	$-$	0	$+$
Position	$T/(C)$	$T \cap (C)$	$(C)/T$

d)



5) $A = \int_{\alpha}^{0} |f(x)| \, dx = \int_{\alpha}^{0} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{0} e^x - \frac{1}{2} x^2 \, dx$

$$= \left[e^x - \frac{1}{6} x^3\right]_{\alpha}^{0} = (e^0 - 0) - \left(e^{\alpha} - \frac{1}{6} \alpha^3\right) = 1 - e^{\alpha} + \frac{1}{6} \alpha^3$$

Or $f(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha^2$

Donc $A = \frac{1}{6} \alpha^3 - \frac{1}{2} \alpha^2 + 1$ (ua)