RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	Session de contrôle	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure** de l'annexe jointe, ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.

I, J et K sont les milieux respectifs des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Soit S la similitude directe de centre B et telle que S(J)=C.

1) Déterminer l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$ et (Γ') le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Montrer que S (K) = O.
   b) En déduire que $S(\Gamma) = \Gamma'$.
   c) Déterminer et construire le point $A' = S(A)$.

3) La droite (OC) recoupe (Γ') en P et la droite (BP) recoupe (Γ) en Q.

On note S^{-1} l'application réciproque de S.

   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S^{-1}
   b) Montrer que $S^{-1}(A) = Q$.
   c) Quelle est la nature du triangle BJQ ?
   d) Prouver que K est le milieu du segment $[QI]$.

4) Soit $\sigma = S \circ S_{(AB)}$ où $S_{(AB)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
   a) Justifier que σ est une similitude indirecte et déterminer ses éléments caractéristiques.
   b) Déterminer $\sigma(Q)$ et $\sigma(J)$.
   c) La droite (IJ) coupe la droite (QB) en un point M.
   Déterminer et construire le point $M' = \sigma(M)$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et r le reste modulo 7 de k.

1) Montrer chacun des résultats suivants :
   $k^3 \equiv 1 \pmod 7$, si et seulement si, $r \in \{1, 2, 4\}$.
   $k^3 \equiv 6 \pmod 7$, si et seulement si, $r \in \{3, 5, 6\}$.
   $k^3 \equiv 0 \pmod 7$, si et seulement si, $r = 0$.
2) Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer les restes possibles modulo 7 de $x^3 + y^3$.
3) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $E_a = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x^3 + y^3 = a \right\}$.

Montrer que les équations $x^3 + y^3 \equiv 3 \pmod 7$ et $x^3 + y^3 \equiv 4 \pmod 7$ n'admettent

pas de solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4) On considère l'ensemble E_{9990}. Supposons qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $(x,y) \in E_{9990}$.
   a) Montrer alors que $x \equiv 0 \pmod 7$ ou $y \equiv 0 \pmod 7$.
   b) Déterminer E_{9990}.

Exercice 3 : (5 points)

On dispose d'une urne U_1 contenant deux boules noires et deux boules blanches et d'une urne U_2 contenant une boule noire et trois boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On procède à l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de U_1.

- Si elle est blanche, on la remet dans U_1 et on tire simultanément deux boules de U_2,

- Si elle est noire, on la met dans U_2 et on tire simultanément deux boules de U_2.

On considère les évènements suivants :

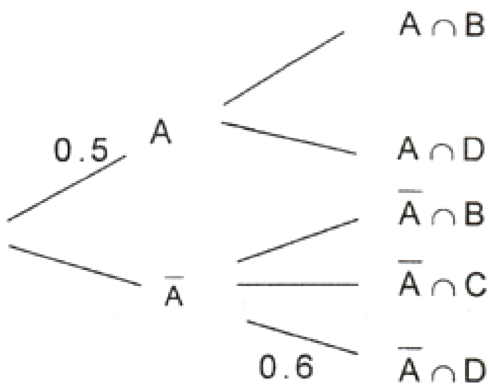
A « La boule tirée de U_1 est blanche. »

B « On tire deux boules blanches de l'urne U_2. »

C « On tire deux boules noires de l'urne U_2. »

D « On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne U_2. ».

1) a) Recopier et compléter l'arbre de choix suivant :



b) Déterminer p(B) et p(D).

c) Montrer que la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans U_2 est égale à $\frac{3}{10}$

2) Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules noires restantes dans U_2.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Quelle est la probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans U_2 ?

3) On répète n fois de suite (n>1) et de manière indépendante l'expérience aléatoire précédente.

On désigne par F_n l'évènement : « Il ne reste dans U_2 aucune boule noire pour les (n-1) premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la $n^{ème}$ épreuve ».

Quelle est la probabilité p_n de F_n ?

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x\ln(1+x)}{1+x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que $f'(x) = \frac{x+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$, x > -1.

c) Montrer que $x+\ln(1+x) > 0$, si et seulement si, $x > 0$.

d) En déduire le tableau de variation de f.

e) Tracer (C).

B) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $V_n = \int_1^{\frac{n+1}{n}} f(t^n)\, dt$ et on considère la fonction F_n définie sur $[1, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t} \sqrt[n]{t}\, dt$.

1) Montrer que $G(x) = \frac{1}{2}\ln^2(1+x) - \frac{1}{2}\ln^2(2)$, $x \geq 1$.

2) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $G(x^n) \leq F_n(x) \leq x\, G(x^n)$.

3) Montrer que F_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $F'_n(x) = n f(x^n)$, $x \geq 1$.

4) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $n\, V_n = F_n(\frac{n+1}{n})$.

5) a) Montrer que $G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq n\, V_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$, $n \geq 1$.

b) Vérifier que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n V_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure