

EXERCICE 1

I	1	Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.	b
	2	$P(\bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B} / A) + p(\bar{A}) \times p(\bar{B} / \bar{A})$ $= 0.2 \times 0.6 + 0.8 \times 0.3 = 0.36$	c
II	1	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^n} = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$	a
	2	Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \left(\frac{-x}{2}\right)^n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \Leftrightarrow \left \frac{-x}{2}\right < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$	b

EXERCICE 2

1) (E) : $z^2 - (1+i\sqrt{3})(1-i)z + 2\sqrt{3} = 0$.

a) $(1-i)^2 - (1+i\sqrt{3})(1-i)^2 + 2\sqrt{3} = -2i - (1+i\sqrt{3})(-2i) + 2\sqrt{3} = -2i + 2i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$.

Alors $z_1 = 1 - i$, est une solution de (E).

b) Soit z_2 la seconde solution. $z_2(1-i) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow z_2 = \frac{2\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2(1+i)\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

Autrement : $1-i+z_2 = \frac{-[-(1-i)(1+i\sqrt{3})]}{1} = 1-i+i\sqrt{3}(1-i)$ donc : $z_2 = i\sqrt{3}(1-i) = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

2) $z_A = 1-i$, $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b). $(i\sqrt{3})z_A = (i\sqrt{3})(1-i) = i\sqrt{3} + \sqrt{3} = z_B$.

Ou : $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3} = i\sqrt{3}(1-i) = i\sqrt{3}z_A$.

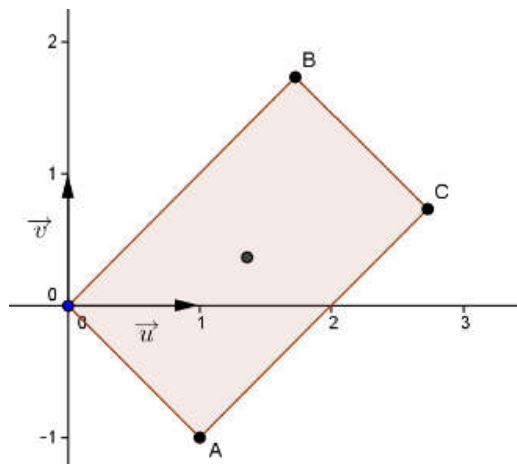
c) $z_A + z_B = z_A + (i\sqrt{3})z_A = (1+i\sqrt{3})z_A = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = z_C$.

d) $z_A + z_B = z_C \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ Alors le quadrilatère OACB est un parallélogramme

De plus $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ d'où OACB est un rectangle.

e)



3).a/ .G centre de gravité du triangle OAI $\Leftrightarrow \vec{GO} + \vec{GA} + \vec{GI} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OI}$
 $\Leftrightarrow z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_I)$.

$$b/. z_I = \frac{1}{2}(z_O + z_C) = \frac{1}{2}z_C.$$

$$z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}z_C + z_A\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_A + z_A\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + 1\right)z_A = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}z_A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}+i)z_A$$

$$c/. z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}+i)z_A = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}.$$

EXERCICE 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A(2, -2, 2), B(2, 0, 0) et C $\left(\frac{6}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$.

$$1) a) \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{4}{5} \\ -2 \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}, \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + (-2) \times 0 + \frac{8}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = 0$$

Alors ABC est un triangle rectangle en C.

b) $x + 2y + 2z - 2 = 0$ est une équation cartésienne d'un plan (π) .

- $x_A + 2y_A + 2z_A - 2 = 2 - 4 + 4 - 2 = 0$ alors $A \in (\pi)$.
- $x_B + 2y_B + 2z_B - 2 = 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 = 0$ $B \in (\pi)$.
- $x_C + 2y_C + 2z_C - 2 = \frac{6}{5} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{2}{5} - 2 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = 0$ alors $C \in (\pi)$.

Or par les trois points non alignés A, B et C ne passe qu'un seul plan.

Conclusion : le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $x + 2y + 2z - 2 = 0$

2)a).

$$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{4} \\ -5 \end{pmatrix} \wedge \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{4}{25} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{4}{25} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC) alors \vec{n} est un vecteur directeur de Δ .

$$d'où \Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$b) M(x, y, z) \in P \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z - 2 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

$$4(2+t) + 8(-2+2t) - (2+2t) - 8 = 0 \Leftrightarrow 18t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ d'où : } P \cap \Delta = \{I(3, 0, 4)\}.$$

c) Soit Ω le centre de la sphère S. S est tangente au plan (ABC) en A alors $\Omega \in \Delta$ d'autre part $\Omega \in P$ alors $\Omega = I$.

Soit R le rayon de la sphère S.

$$R = IA = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

$$3).a) \overline{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{CI} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{CB} \cdot \overline{CI} = \frac{2}{5} \times \frac{9}{5} (2 \times 1 + 0 \times 0 + (-1) \times 2) = \frac{18}{25} (2 - 2) = 0, \text{ Alors le triangle CIB est rectangle en C.}$$

b) Le triangle CIB est rectangle en C et J le milieu de [IB] alors $JC = JB = JI = \frac{IB}{2}$.

Le triangle ABI est rectangle en A et J le milieu de [IB] alors $JA = JB = JI = \frac{IB}{2}$.

$$\text{D'où } JA = JB = JI = \frac{IB}{2} = JC.$$

Donc I, B, A et C appartiennent à la sphère S' de centre J et de rayon $\frac{IB}{2}$.

c) A, B et C appartiennent à la fois au plan (ABC) et à la sphère S' alors S' coupe (ABC) suivant le cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en C donc l'intersection est le cercle de diamètre [AB].

EXERCICE 4

f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{-x+1} - e^{x-3}$

$$1) .a) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-3} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

(C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique de direction (O, \vec{j}) dirigée vers le bas.

$$b) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-3} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty. \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^1}{xe^x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

(C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche infinie parabolique de direction (O, \vec{j}) dirigée vers le haut.

2). a) f est dérivable sur IR et $f'(x) = -e^{-x+1} - e^{x-3} = -(e^{-x+1} + e^{x-3}) < 0$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ par suite f est strictement décroissante sur IR.

b).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$			-
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

c) $f(2) = 0$.

D'après le tableau de variations de f on a :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Ou autrement : $\square x \geq 2$

f est croissante

$\square x \leq 2$

f est décroissante

$f(x) \leq f(2)$ par suite $f(x) \leq 0$.

$f(x) \geq f(2)$ par suite $f(x) \geq 0$.

3). a) $f''(x) = (-e^{-x+1} - e^{x-3})' = -(-x+1)'e^{-x+1} - (x-3)'e^{x-3} = e^{-x+1} - e^{x-3} = f(x)$.

b) f'' s'annule en changeant de signe en 2 et $f(2) = 0$ alors le point $I(2, 0)$ est un point d'inflexion de (C) .

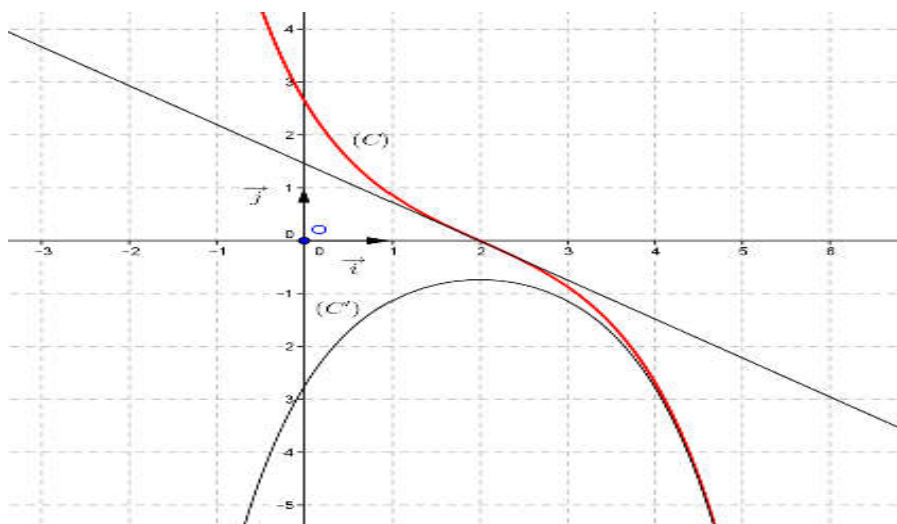
c) Soit T la tangente à (C) en I .

$$T: y = f'(2)(x-2) + f(2) = -2e^{-1}x + 4e^{-1}$$

4). a) $f(x) - f'(x) = (e^{-x+1} - e^{x-3}) - (-e^{-x+1} - e^{x-3}) = 2e^{-x+1} > 0$.

Alors (C) est au dessus de (C') .

b) voir figure



$-2e^{-1} \times 3 + 4e^{-1} = -2e^{-1} \Rightarrow A(3, -2e^{-1}) \in T$.

5)a) $A_\lambda = \int_0^\lambda |f(x) - f'(x)| dx = \int_0^\lambda 2e^{-x+1} dx = [-2e^{-x+1}]_0^\lambda = 2e - 2e^{1-\lambda}$.ua .

b) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2e - 2e^{1-\lambda}) = 2e$