



Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 :(6.5 points)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

c) Dédire que le point $A(1, \ln 2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) .

3) Dans l'annexe ci-jointe, on donne le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe (C) et les points A , $E(0, \ln 2 - 1)$ et $K(1 - \ln 2, 0)$.

a) Soit T la tangente à (C) au point A . Montrer qu'une équation de T est $y = x - 1 + \ln 2$.

b) Montrer que T coupe l'axe des ordonnées au point E et l'axe des abscisses en K .

c) Tracer la tangente T dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4) Soit L l'aire du triangle OKE et S l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) Montrer que $L = \frac{(1 - \ln 2)^2}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\ln(1+x^2) \leq \ln(1+x)$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$.

d) En déduire que $\int_0^1 \ln(1+x) dx = 2\ln 2 - 1$.

e) Montrer que $\frac{(1 - \ln 2)^2}{2} \leq S \leq \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Exercice 2 :(4 points)

1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 2 \\ -2\alpha & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le déterminant de M_α est égal à $-4\alpha + 8$.

b) Pour quelle valeur de α , M_α est-elle non inversible ?

2) Dans cette question, on prend $\alpha = 2$ et on note $C = M_2$.

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , le système (S) : $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3) Dans cette question, on prend $\alpha = -2$ et on note $A = M_{-2}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A \times B = 4I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

b) En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

c) Résoudre alors dans \mathbb{R}^3 , le système (S') : $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :(4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - 1. \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n} (1 - \sqrt{1+u_n})$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = \ln(1+u_n)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln 2$.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 4 : (5.5 points)

1) a) Vérifier que $(2 - 2i)^2 = -8i$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (2 + 8i)z - 15 + 10i = 0$.

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 3i$, $z_B = -1$ et $z_C = 5i$.

a) Calculer $(z_B - z_A)(\overline{z_C - z_A})$.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A .

3) Soit x et y deux entiers tels que $y \neq 0$.

Dans le plan P , on considère les points M et N d'affixes respectives x et iy . On se propose de déterminer les affixes des points M et N tels que AMN est rectangle en A .

a) Montrer que $(z_M - z_A)(\overline{z_N - z_A}) = (-2x - 3y + 13) + i(-xy + 3x + 2y)$.

b) Montrer que $(-2x - 3y + 13) + i(-xy + 3x + 2y) \neq 0$.

c) Montrer que le triangle AMN est rectangle en A si et seulement si $2x + 3y = 13$.

4) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x + 3y = 13$.

a) En utilisant la question 2), donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) Trouver les affixes des points M et N tels que AMN est rectangle en A et $-4 \leq x \leq 4$.

Empty box for identification details.

Section : N° d'inscription : Série :
Nom et Prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....

Empty box for exam title.

Epreuve : MATHÉMATIQUES – Section : Sciences de l'informatique
(Session principale 2019)

Annexe à rendre avec la copie

