Exercice 1 : (4,5 points)

1) a) $det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 4 \times (-2) + 2 \times (-4) + 6 \times 2$$

$$= -4$$

Comme $det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible.

b) $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$

$$A(B - 2I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{2}(B - 2I_3) = I_3$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) a) $(\alpha, \alpha, 0)$ est une solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\alpha = 1 \\ 3\alpha - \alpha = 2 \\ -\alpha + \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$ ce qui est impossible.

Donc il n'existe aucun réel α pour lequel $(\alpha, \alpha, 0)$ soit une solution de (S).

b) (a, b, c) est une solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 6c = 1 \\ 3a - b + 5c = 2 \\ -a + b - 3c = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

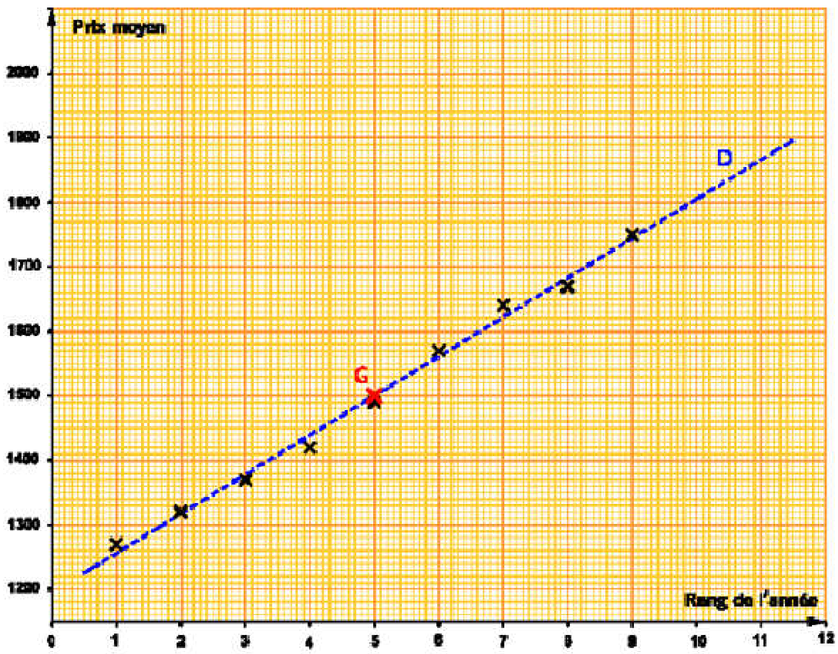
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)\right\}$

Exercice 2 : (4,5 points)

1) a) Le nuage :



b) Le nuage a une forme allongée, donc un ajustement affine est possible.

c) $\bar{x} = 5$; $\bar{y} = 1500$; $G(5,1500)$

2) a) Une équation de la droite D de régression de x en y est :

$y = ax + b$

Avec $a = 61$ et $b = 1195$

Donc $D: y = 61x + 1195$

b) 2023 correspond à $x = 15$

On estime le prix moyen d'un litre d'essence sans plomb en 2023 à :

$y = 61 \times 15 + 1195 = 2110\ dinars.$

Exercice 3 : (6 points)

1) a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1)\ln x = +\infty$ car $\lim_{x\to 0^+} x - 1 = -1$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

$\Longrightarrow$ La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b) • $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x-1)\ln x = +\infty$ car $\lim_{x\to +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

• $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x} \ln x = +\infty$ car $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = 1$

et $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

$\Longrightarrow$ La courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$de direction celle de l'axe des ordonnées.

2) • La fonction $x \longmapsto x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0,+\infty[$.

• La fonction $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$f'(x) = \ln x + (x-1)\frac{1}{x} = \ln x + \frac{x-1}{x}$.

3) a)

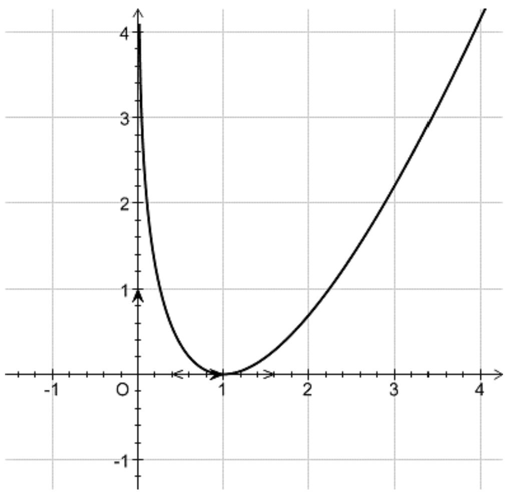
x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	

Donc $\ln x$ et $\frac{x-1}{x}$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

b) Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)



5) a) F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$F'(x) = \left(\frac{2x}{2}-1\right)\ln x + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x} - \frac{2x}{4} + 1$$

$$= (x-1)\ln x + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 1$$

$$= (x-1)\ln x + \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} - x\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 1$$

$$= (x-1)\ln x + \frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{2} + 1 = (x-1)\ln x \ = f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) L'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est :

$$\mathcal{A}=\int_1^e |f(x)|\,dx$$

$= \int_1^e f(x)\,dx$ car $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[1,e]$

$$= [F(x)]_1^e$$

$$= F(e)-F(1)$$

$$= \left(\frac{e^2}{2}-e\right)\ln e-\frac{e^2}{4}+e-\left(\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\ln 1-\frac{1^2}{4}+1\right)$$

$$= \frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e-\left(-\frac{1}{4}+1\right)$$

$$= \frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}\times\ (ua)$$

Exercice 4 : **(5 points)**

1) a) • $u_1=\frac{2}{1+u_0}=\frac{2}{1+0}=2$

• $u_2=\frac{2}{1+u_1}=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$

• Comme $u_0<u_2<u_1$, alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

b) • $0\leq u_0=0\leq 2$ vrai

• Supposons que $0\leq u_n\leq 2$ et montres que $0\leq u_{n+1}\leq 2$.

$$0\leq u_n\leq 2 \Leftrightarrow 1\leq 1+u_n\leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq\frac{1}{1+u_n}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\leq\frac{2}{1+u_n}\leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\leq u_{n+1}\leq 2$$

Donc $0\leq\frac{2}{3}\leq u_{n+1}\leq 2$

Conclusion : $0\leq u_n\leq 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) a) $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}$$

$$=\frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2}$$

$$= \frac{\frac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\frac{2+2+2u_n}{1+u_n}}$$

$$= \frac{1-u_n}{4+4u_n}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

$$= -\frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2} \in]-1,1[$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n - 1$

$$\Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n - v_n u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(1 - v_n) = 1 + 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$$

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2v_n}{1-v_n} = 1$ car $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Donc (u_n) converge vers 1.