EXERCICE 1

1

a). $\left(3+i\sqrt{3}\right)^2 = 3^2 + 2x\ 3x\ i\sqrt{3} + \left(i\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 6\,i\sqrt{3}\ - 3 = 6 + 6\,i\sqrt{3}$.

b).Résolvons l'équation : $z^2 + (5 - i\sqrt{3})\,z + 4 - 4\,i\sqrt{3} = 0$.

$\Delta = (5 - i\sqrt{3})^2 - 4\,(4 - 4\,i\sqrt{3}) = 25 - 10i\sqrt{3} + \left(i\sqrt{3}\right)^2 - 16 + 16\,i\sqrt{3}$

$= 25\text{-}19 + 6\,i\sqrt{3} = 6 + 6i\sqrt{3} = \left(3+i\sqrt{3}\right)^2$ (d'après 1/ a).

Une racine carrée de Δ est = $3 + i\sqrt{3}$, l'équation admet deux racines :

$$z_1 = \frac{-(5-i\sqrt{3})-(3+i\sqrt{3})}{2} = \frac{-5+\cancel{i\sqrt{3}}-3-\cancel{i\sqrt{3}}}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

$$z_2 = \frac{-(5-i\sqrt{3})+(3+i\sqrt{3})}{2} = \frac{-5+i\sqrt{3}+3+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}\ .$$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{-4\,,-1+\,i\sqrt{3}\right\}}$$

<u>**Autrement :**</u>$z^2 + (5 - i\sqrt{3})\,z + 4 - 4\,i\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow\ z^2 - [(-4) + (-1\ + i\sqrt{3}\ )]\,z + (\text{-}4)x\,(\text{-}1+i\sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = (-4) + (-1\ + i\sqrt{3}\ ) \\ z_1 x\, z_2 = (-4)x\,(-1\ + i\sqrt{3}\ ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -4 \\ z_2 = -1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$

2

a). OC = $|-i\,||z_B| = |z_B| =$ OB .Donc le triangle OBC est isocèle de sommet principal O.

. $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}}\right) \equiv arg\ \left(\frac{z_B}{z_C}\right)\ [2\pi]$

$\equiv arg\ (-i\,)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b). $z_B = 2\left(\frac{-1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\ sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

<u>**Ou**</u> : $\left|-1 + \ i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2.$

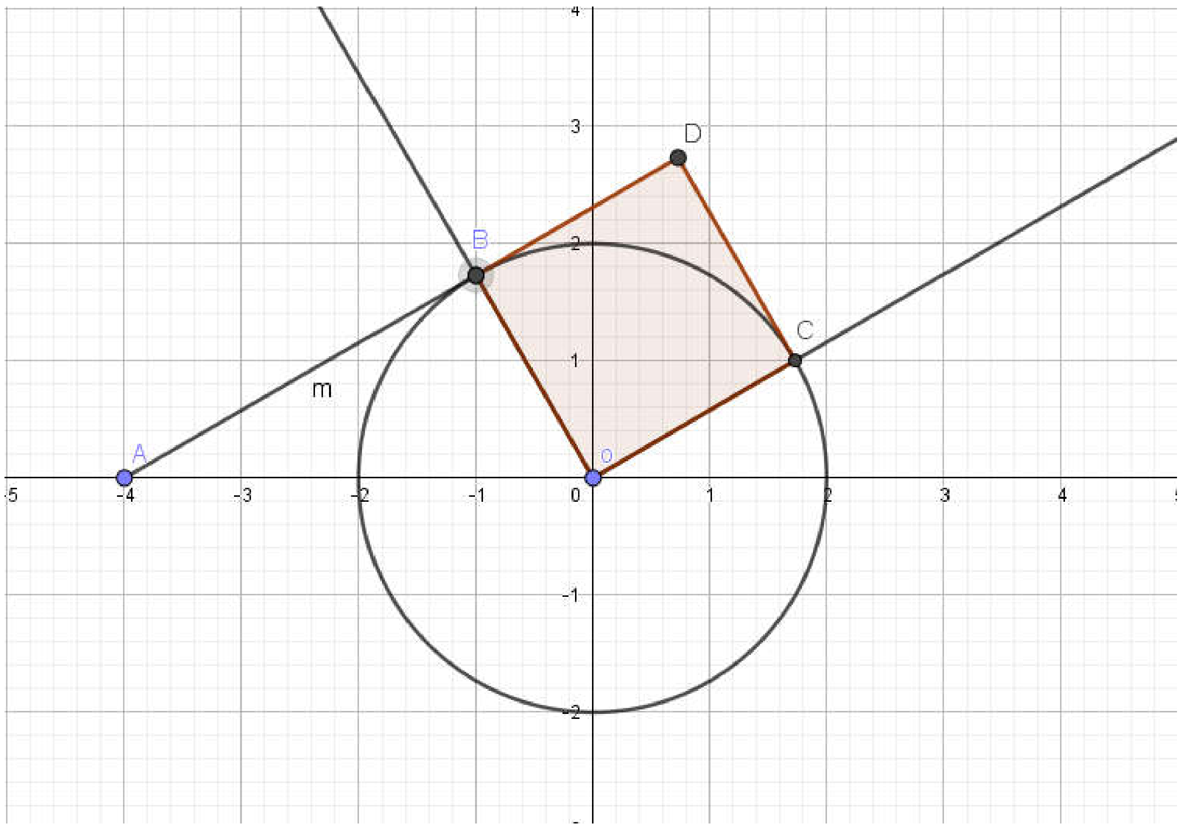
$$\left.\begin{array}{l} \cos[\arg(z_B)] = \frac{-1}{2} \\ \sin[\arg(z_B)] = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}\ \text{alors}\quad \arg(z_B) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

Donc : $z_B = 2\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On a : $|z_B| = 2 \Leftrightarrow OB = 2 \Leftrightarrow B\,appartient\ au\ cercle\ de\ centre\ O\ de\ rayon\ 2$.

c). voir figure ci –dessous .

3



a). d'après 2/a on a : OB = OC et$\left(\widehat{\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}}\right) = \equiv\ -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc pour prouver que le quadrilatère OCDB est un carré il suffit de montre qu'ilest un parallélogramme

or $z_D = (1-i)z_B = z_B + \left(-i\,z_B\right) = z_B + z_C \Leftrightarrow aff(\overrightarrow{OD}) = aff(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow OCDB\ est\ un\ parallélogramme.$

<u>Conclusion :</u> OCDB est un carré.

b). aff($\overrightarrow{AB}$) = $z_B - z_A = -1 + i\sqrt{3} + 4 = 3 + i\sqrt{3} = \sqrt{3}$ ($\sqrt{3}$ + i) = $\sqrt{3}$ (-i) (-1 + i $\sqrt{3}$)

$= \sqrt{3}\,(-i\,z_B) = \sqrt{3}\,z_C$.

c). aff ($\overrightarrow{AB}$) = aff($\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}$) = aff($\sqrt{3}\,\overrightarrow{BD}$) car $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD}$ vu que OCDB est un carré .

alors $\overrightarrow{AB} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{BD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ *sont colinàaires*

<u>Conclusion</u> : Les point A , B et D sont alignés.

d). aire (OADC) = $\frac{(OC+AD).OB}{2}$; OADC est un trapèze .

or OC = OB = 2 et AD = AB + BD = $\sqrt{3}\ OC + OC = (2 + 2\sqrt{3})$

aire (OACD) = $\frac{(2+2+2\sqrt{3}).2}{2}$ = 4+2$\sqrt{3}$ (*unité d'aire*).

EXERCICE 2

1

a). E(X) = $\frac{1}{\lambda}$ = 4.67 années = 4 ans 8 mois 1 jour.

Un ordinateur fonctionne en moyenne 4 ans 8 mois avant la première panne du matériel.

b) . p(X> 5) = $e^{-5\,x\,0.214}$ = 0.343 .

c). Le nombre d'ordinateur qui n'ont aucune panne de matériel au cours de ces 5 premières années est égal à 100 x 0.343 = 34.3 donc 34 ordinateurs.

2

a). Les mises à jour effectuées sur les 100 ordinateurs fonctionnels de l'entreprise peuvent être considérées comme des épreuves identiques et indépendantes, chacune n'a que deux issues possibles contraires l'une est : S= « l'ordinateur est en panne de déprogrammation de » de probabilité 0.03 , ce qui nous permet d'affirmer que Y suit une loi binomiale de paramètres (100, 0.03)

b). p(Y= 0) = $(1-0.03)^{100}$ = $(0.97)^{100}$.

c). E(Y) = 100 x 0.03 = 3.donc sur les 100 ordinateurs il y'a en moyenne 3 qui ont une panne de déprogrammation.

EXERCICE 3

1

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : f(x) = x-1 + e^{1-x} .

a). $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} 1-x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0\end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$ (★ de plus $\lim_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) . $\lim\limits_{x\to+\infty} (\, f(x) - (\, x-1)\,) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$ (d'après ★).

Donc la droite Δ: $y = x-1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

c). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-x)\,(-1+\frac{e^{1-x}}{1-x})$

or :). $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} 1-x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{1-x}}{1-x} = +\infty$ et puisque $\lim_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(1-x)}{x}(-1+\frac{e^{1-x}}{1-x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-1+\frac{e^{1-x}}{1-x}) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(C) admet une branche parabolique de direction (O , $\vec{j}$) au voisinage de - ∞.

2

a). f'(x) = 1+ (-1) e^{1-x} = $1-e^{1-x}$.

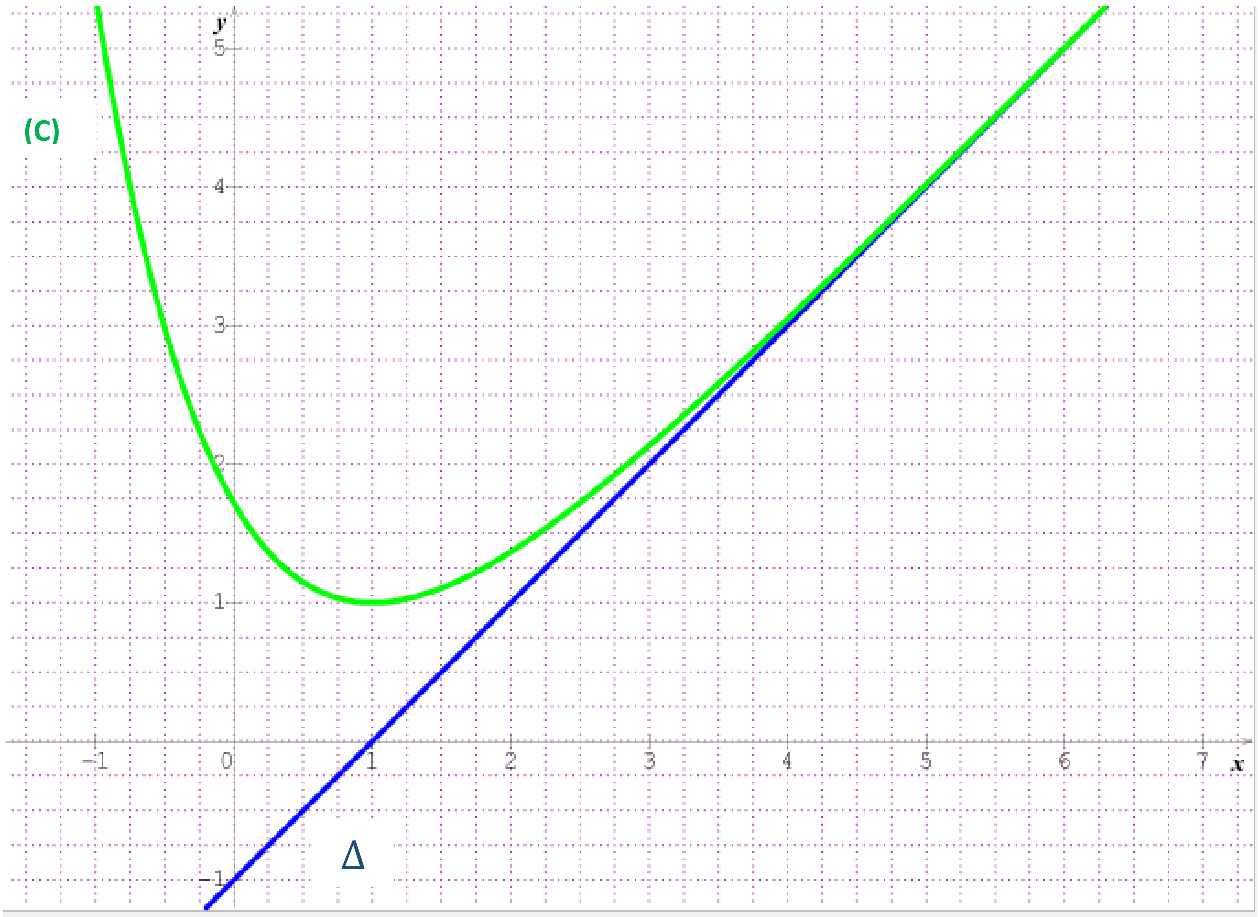
b.) x $\in [1, +\infty[\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow 1-x \leq 0 \Rightarrow e^{1-x} \leq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$.

- x $\in]-\infty, 1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow e^{1-x} \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0$.

c) .

x	$-\infty \quad +\infty$		
f'(x)			
f	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

d).



3 **a).** $A_\lambda = \int_0^\lambda [\,f(x) - (x-1)]dx = \int_0^\lambda e^{1-x}\ dx = \ [-\,e^{1-x}]_0^\lambda$ = e - $e^{1-\lambda}$.

b). $\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}$ e - $e^{1-\lambda}$.= e.

EXERCICE 4

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2 - U_n} \text{ , } \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a).Désignons parPla propriété « pour tout n ∈ ℕ, 0< $U_n < 1$».

- **On a$U_0 = \frac{1}{2}$, donc 0< $U_0 < 1$ alors P est vraie pour n = 0.**
- **Supposons que P est vraie à l'ordre n c'est-à-dire on a0< $U_n < 1$ $(H.R)$**

- Démontrons que P est vraie à l'ordre n +1 ,ce qui revient à montrer que :$0< U_{n+1} < 1$?
  - On a par hypothèse : $0< U_n < 1 \Rightarrow -1< U_n < 0 \Rightarrow 1 < 2-U_n < 2$ (I)

$$\Rightarrow 2-U_n > 0 \ et\ U_n > 0 \ par\ suite \frac{U_n}{2-U_n} > 0 \ alors\ U_{n+1} > 0$$

  - $U_{n+1} - 1 = \frac{U_n}{2-U_n} - 1 = \frac{U_n-(2-U_n)}{2-U_n} = \frac{U_n-2+U_n}{2-U_n} = \frac{2(1-U_n)}{2-U_n} < 0 \ car\ U_n < 1 \ et\ 2-U_n > 0$

D'où $U_{n+1} < 1$ (C'est Qu'il Fallait Démontrer) .

Autrement : Remarquons que

$U_{n+1} = -\frac{2-U_n-2}{2-U_n} = -1 + \frac{2}{2-U_n}$ or (I)$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2-U_n} < 1$(II)

$\Rightarrow 1 < \frac{2}{2-U_n} < 2 \Rightarrow 0 < -1 + \frac{2}{2-U_n} < 1 \Rightarrow 0< U_{n+1} < 1$(C.Q.F.D)

Conclusion : pour tout $n\in \mathbb{N}$, $0< U_n < 1$.

b). Étudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2-U_n} - U_n = U_n\left(\frac{1}{2-U_n} - 1\right) = U_n\left(\frac{1-2+U_n}{2-U_n}\right) = U_n \cdot \frac{-1+U_n}{2-U_n} < 0$ car $U_n > 0$

, $(-1+U_n) < 0$ et $2-U_n > 0$. Donc $(U_n)_n$ est une suite décroissante .

1

Autrement :$U_n > 0$, donc la suite $(U_n)_n$ est à termes strictement positifs .

or on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2-U_n} < 1$; D'après (II), par suite la suite $(U_n)_n$ est décroissante.

c) .$(U_n)_n$ est décroissante et minorée par zéro donc elle est convergente. Soit L sa limite

$U_{n+1} = f(U_n)$; où $f(x) = \frac{x}{2-x}$ qui est continue sur $[0,1]$.

$U_n \in]0,1[$ donc $L \in [0,1]$

} alorsf est continue en L

Donc On a $f(L) = L \Leftrightarrow \frac{L}{2-L} = L \Leftrightarrow L\left(\frac{1}{2-L} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow L = 0 \ ou\ L = 1$

Or(U_n) est décroissante donc$U_n < U_0 = \frac{1}{2}$ par suite L= 0

a). $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{1-U_{n+1}} = \frac{\frac{U_n}{2-U_n}}{1-\frac{U_n}{2-U_n}} = \frac{U_n}{2-U_n-U_n} = \frac{U_n}{2-2U_N} = \frac{U_n}{2(1-U_n)} = \frac{1}{2}V_n$.

la suite $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{U_0}{1-U_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

2

b).$V_n = q^n . V_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

c). $V_n = \frac{U_n}{1-U_n} \Rightarrow \frac{1}{V_n} = \frac{1-U_n}{U_n} \Rightarrow \frac{1}{V_n} = \frac{1}{U_n} - 1 \Rightarrow \frac{1}{U_n} = \frac{1}{V_n} + 1 \Rightarrow \frac{1}{U_n} = \frac{1+V_n}{V_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{V_n}{1+V_n} = \frac{\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{1+2^n}$.

a). S_n' est la somme de (n+1) premiers termes d'une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = 1$ alors $S_n' = V_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \text{x} \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\text{x}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n} = 2 - V_n$.

b). $\lim_{n\to+\infty} S_n' = \lim_{n\to+\infty} 2 - V_n = 2$ car $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$ *puisque* $0 < q < 1$.

3 **c).** On a pour tout n ,$1 \leq 1 + \frac{1}{2^n} \leq 2 \Rightarrow 2^n \leq 2^n.\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq 2^n.2 \Rightarrow 2^n \leq 2^n + 1 \leq 2^{n+1}$.

$$2^n \leq 2^n + 1 \leq 2^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{1}{2^n} \leq U_n \leq V_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V_n \leq U_n \leq V_n$$

d) .On a : $\frac{1}{2}V_0 \leq U_0 \leq V_0$ **en additionnant ces inégalités membre à membre on obtient :**

$\frac{1}{2}V_1 \leq U_1 \leq V_1$ $\frac{1}{2}(V_0 + V_1 + \dots\dots + V_n) \leq U_0 + U_1 + \dots + U_n \leq V_0 + V_1 + \dots\dots + V_n$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S_n' \leq S_n \leq S_n'$$

$$\frac{1}{2}V_n \leq U_n \leq V_n$$

a). $S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0$ **donc la suite** $(S_n)_n$ **est croissante.**

4 **b). D'après 3/d) on** $S_n \leq S_n' = 2 - V_n \Rightarrow S_n \leq 2$ **car** $V_n > 0$ **donc** $(S_n)_n$ *est majorée par* 2

la suite $(S_n)_n$ **est croissante et majorée par 2 donc elle converge .Soit l =** $\lim_{n\to+\infty} S_n$

puisque $\frac{1}{2}S_n' \leq S_n \leq S_n'$ **et** $\lim_{n\to+\infty} S_n' = 2$

Donc : $\frac{1}{2}$x $2 \leq l \leq 2 \Rightarrow 1 \leq l \leq 2$.