RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session de contrôle**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (5 points)

1) a) Vérifier que $\left(3+i\sqrt{3}\right)^2 = 6+6i\sqrt{3}$.

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2+\left(5-i\sqrt{3}\right)z+4-4i\sqrt{3}=0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-4$, $z_B=-1+i\sqrt{3}$ et $z_C=-iz_B$.

a) Montrer que le triangle OBC est isocèle et que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Mettre z_B sous forme exponentielle et déduire que le point B appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

c) Placer le point A et construire les points B et C.

3) Soit D le point d'affixe $z_D=(1-i)z_B$.

a) Montrer que le quadrilatère OCDB est un carré.

b) Montrer que $\text{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right)=\sqrt{3}\,z_C$.

c) Déduire que les points A, B et D sont alignés.

d) Calculer l'aire du quadrilatère OADC.

Exercice 2 (4 points)

Pour gérer sa production, une usine exploite un programme installé sur ses 100 ordinateurs de même caractéristique.

On admet que la durée de vie, en années, d'un ordinateur avant la première panne de matériel, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,214$.

1) a) Calculer $E(X)$ et en donner une signification.

b) Quelle est la probabilité qu'un ordinateur de cette entreprise n'ait aucune panne de matériel au cours des 5 premières années de fonctionnement ?

c) Donner une estimation du nombre d'ordinateurs qui n'ont aucune panne de matériel au cours de ces 5 premières années sur les 100 utilisés par l'entreprise ?

2) Un ordinateur fonctionnel, peut subir un autre type de panne appelé panne de déprogrammation qui ne peut survenir qu'à la suite d'une mise à jour de son programme de gestion de production. La probabilité que cette panne se produise est égale à $0,03$.

L'entreprise effectue des mises à jour du programme de ses 100 ordinateurs fonctionnels d'une manière indépendante l'une de l'autre.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs en panne de déprogrammation.

a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Quelle est la probabilité qu'aucun ordinateur ne soit en panne de déprogrammation ?

c) Sur les 100 ordinateurs combien, en moyenne, ont une panne de déprogrammation ?

Exercice 3 (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + e^{1-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) On note f' la fonction dérivé de f. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $e^{1-x} \leq 1$ et que pour tout $x \in]-\infty, 1]$, $e^{1-x} \geq 1$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

d) Tracer la droite Δ et la courbe (C).

3) Soit λ un réel strictement positif. On désigne par A_λ l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations cartésiennes $x = 0$ et $x = \lambda$.

a) Exprimer A_λ en fonction de λ.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda$.

<u>Exercice 4</u> (5,5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2-u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Déduire alors, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1+2^n}$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = u_0 + u_1 ... + u_n$ et $S'_n = v_0 + v_1 ... + v_n$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S'_n = 2 - v_n$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq 2^n + 1 \leq 2^{n+1}$ puis déduire que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} v_n \leq u_n \leq v_n$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} S'_n \leq S_n \leq S'_n$.

4) a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer un encadrement de sa limite.