

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2018	Session de contrôle	
	Epreuve : Mathématiques	Section : Sciences Techniques
	Durée : 3h	

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5.5 points)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $(E_1): z^2 + (2+i)z + i = 0$.
- 2) On considère dans \mathbb{C} , l'équation $(E): z^3 + (1+i)z^2 - 2z - i = 0$.
 - a) Vérifier que 1 est une solution de (E) .
 - b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que:

$$z^3 + (1+i)z^2 - 2z - i = (z-1)(z^2 + az + b)$$
 - c) En déduire dans \mathbb{C} , les solutions de l'équation (E) .
- 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et $z_C = 1$.
 - a) Mettre chacun des nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
 - b) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.
 Construire les points A, B et C dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe.
- 4) Soient les points E et F du plan d'affixes respectives $z_E = z_A - 1$ et $z_F = z_B - 1$.
 - a) Montrer que OEAC et OFBC sont des parallélogrammes.
 - b) Construire alors E et F.
 - c) Vérifier que : $e^{\frac{5\pi}{12}} \left(e^{\frac{7\pi}{12}} + e^{-\frac{7\pi}{12}} \right) = e^{-\frac{\pi}{6}} - 1$ et $e^{\frac{13\pi}{12}} \left(e^{\frac{\pi}{12}} + e^{-\frac{\pi}{12}} \right) = e^{\frac{7\pi}{6}} - 1$.
 - d) Déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E_1) .

Exercice 2 (4.5 points)

- 1) On considère la fonction f définie sur $[0, 2]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$.
 - a) Vérifier que pour $x \in [0, 2]$, $f'(x) = \frac{3}{4} \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}}$.
 - b) Montrer que pour tout $x \in [0, 2]$, $x \leq \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0, 2]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$.

d) Montrer que pour tout $x \in [0, 2]$, $0 \leq 2 - f(x) \leq \frac{3}{4}(2 - x)$.

2) Soit (u_n) la suite réelle définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(2 - u_n)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

d) Calculer alors la limite de la suite (u_n) .

3) On considère la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $2n - 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leq S_n \leq 2n$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 3 (4 points)

Dans un atelier de réparation d'une agence de location de voitures, on dispose d'un lot contenant un grand nombre de bougies pour moteur à essence.

Le lot est constitué de 50% de bougies d'origine dont 2% sont défectueuses, le reste du lot est constitué de bougies adaptables dont 20% sont défectueuses.

On prélève au hasard une bougie du lot et on considère les deux événements suivants :

D: « la bougie prélevée est défectueuse »

O: « la bougie prélevée est d'origine »

- 1) a) Quelle est la probabilité pour que la bougie prélevée soit défectueuse et d'origine ?
b) Quelle est la probabilité pour que la bougie prélevée soit défectueuse et adaptable ?
c) Montrer que la probabilité p pour que la bougie prélevée soit non défectueuse est égale à 0,89.
- 2) Pour changer les bougies d'une voiture, le mécanicien prélève au hasard quatre bougies du lot. Comme le nombre de bougies est grand, on assimile ce prélèvement à un tirage successif avec remise de quatre bougies.
Quelle est la probabilité pour que les quatre bougies soient non défectueuses ?
- 3) La durée de vie d'une bougie non défectueuse, mesurée en kilomètre, est une variable aléatoire réelle X continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .
a) Sachant que la durée de vie moyenne d'une bougie est 40000 kilomètres, montrer que $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-5}$
b) Calculer la probabilité qu'une bougie dure entre 20000 et 40000 kilomètres.
c) Sachant qu'une bougie a duré 40000 kilomètres, calculer la probabilité pour qu'elle dure 5000 kilomètres de plus.

Exercice 4 (6points)

Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe, on a construit dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe représentative (Γ) de la fonction h définie sur $[1, +\infty[$ par: $h(x) = x - 3 + (x + 1)e^{1-x}$ et la droite D d'équation $y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{4}{e}$ et on a placé aussi le point $I(2, 1 - 2e^{-1})$.

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 - xe^{1-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.
b) Montrer que la droite $\Delta: y = 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x - 1)e^{1-x}$.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 3) a) Etudier la position relative de la courbe (C) et de la droite Δ .
b) Montrer que la droite D est la tangente à la courbe (C) au point I .
c) Montrer que I est un point d'inflexion pour la courbe (C) .
d) Tracer, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe (C) et la droite Δ .
- 4) Pour tout $\alpha > 1$, on considère A_α l'aire, en u.a, de la partie P_α du plan limitée par la courbe (C) , la droite des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
a) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = 1 - e^{1-x} - f'(x)$.
b) Montrer que $A_\alpha = h(\alpha)$.
c) Placer sur l'axe (O, \vec{i}) le réel α_0 pour lequel $A_{\alpha_0} = 1$.
d) Hachurer la partie P_{α_0} .

Section : N° d'inscription : Série :
Nom et Prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants
.....
.....

✂

Épreuve: Mathématiques-Section : Sciences techniques-Session de contrôle - 2018
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

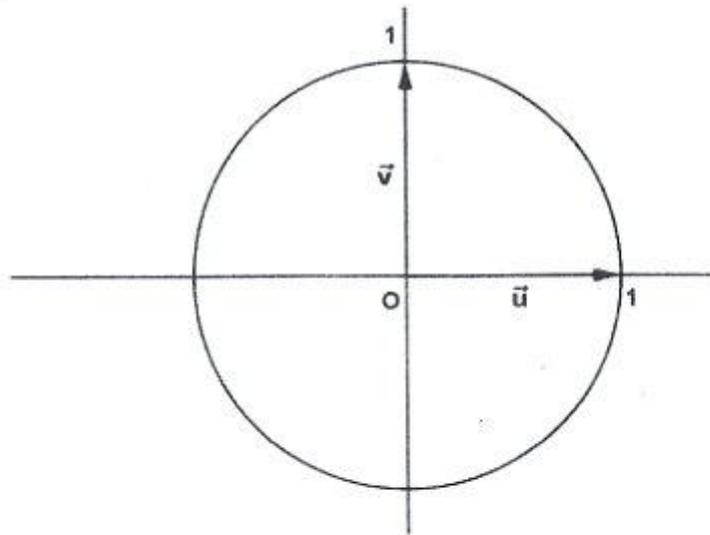


Figure 2

