Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Science expérimentales)

Session de contrôle 2018

Exercice n°1 :

De quoi s'agit-il ?

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relative d'une sphère et d'un plan**
- **Volume d'un tétraèdre**

1. a. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&-1\\3&-1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k} \text{ ainsi } \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$$

b. On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|=\frac{1}{6}\left|-4-8\right|=2$

2. Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ vecteur normal à P donc $P:2x+2y+4z+d=0$

On a $C(0;0;2)\in P$ donc $d=-8$ ainsi $P:x+y+2z-4=0$

3.

a. On a $M(x;y;z)\in S \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)^2-1+(y-1)^2-1+(z+1)^2-1-8=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=11$

donc S est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$

b. On a $d(I,P)=\frac{\left|-1+1-2-4\right|}{\sqrt{1+1+4}}=\sqrt{6}<\sqrt{11}$ donc $P\cap S$ est un cercle de rayon $r=\sqrt{11-6}=\sqrt{5}$

c. On a $B\in P$ et $C\in P$ et puisque $0^2+4^2+0^2+2\times0-2\times4+2\times0-8=0$ donc $B\in S$ et puisque $0^2+0^2+2^2+2\times0-2\times0+2\times2-8=0$ donc $C\in S$ de plus

$BC=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$ donc $[BC]$ est un diamètre du cercle (ς) et ainsi

$H=B*C$ d'où $H(0;2;1)$

4. **a.** On a $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\begin{cases} x_M-1=-a \\ y_M-1=3a \\ z_M-1=-a \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x_M=1-a \\ y_M=1+3a \\ z_M=1-a \end{cases}$ ainsi

$M(1-a;1+a;1-a)$

b. on a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} 1-a \\ 3a-3 \\ 1-a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} 1-a \\ 1+3a \\ -1-a \end{pmatrix}$ d'où

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=(1-a)^2+(3a-3)(1+3a)-(1-a^2)=11a^2-3-8a=(a-1)(11a+3)$

c. On a $E\in(AB)\cap(\varsigma)\Leftrightarrow\begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CE}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ (a-1)(11a+3)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB} \\ a=1 \;\; ou \;\; a=-\dfrac{3}{11} \end{cases}$

pour $a=1$ on a $E(0;2;0)$ or puisque $H(0;2;1)$ donc $HE=1\neq\sqrt{5}$ d'où $E\notin(\varsigma)$

ainsi $a=\dfrac{-3}{11}$ d'où $\overrightarrow{AE}=\dfrac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$

d. On a $V'=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|=\dfrac{1}{6}\left|\left(\dfrac{-3}{11}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|=\dfrac{3}{11}\left[\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}\right|\right]=\dfrac{3}{11}V$

<u>Exercice n°2 :</u>

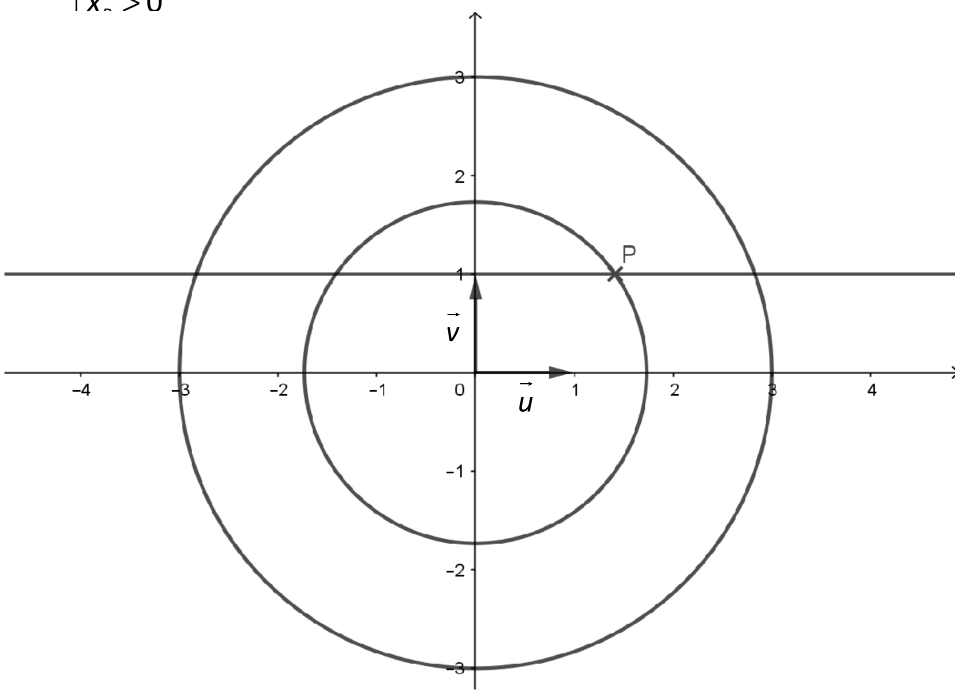
De quoi s'agit-il ?

- **Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**
- **Complexe et géométrie**

I.

1. **a.** On a $OP=|P|=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$ d'où $P\in(C)$

b. On a $\begin{cases} y_P=1 \\ x_P>0 \end{cases}$ et $P\in(C)$ donc $P\in(C)\cap\Delta: y=1$ avec $x_P>0$ d'où la construction



c. On a $\begin{cases} \arg(P) \equiv \alpha[2\pi] \\ |P| = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow P = \sqrt{3}e^{i\alpha}$

2.

a. On a $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OQ}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}}\right)[2\pi] \equiv \alpha + \alpha[2\pi] \equiv 2\alpha[2\pi]$

b. On a $Q \in (C')$ donc $|q| = 3$ et puisque $\arg(q) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OQ}}\right)[2\pi] \equiv 2\alpha[2\pi]$ d'où $q = 3e^{i2\alpha}$

c. On a $p^2 = \left(\sqrt{3}e^{i\alpha}\right)^2 = 3e^{i2\alpha} = q$ donc $q = \left(\sqrt{2} + i\right)^2 = 2 + 2i\sqrt{2} - 1 = 1 + 2i\sqrt{2}$

II.

1. a. On a $\Delta = 64 - 4 \times 16 \times 9 = -512$ d'où $\delta = i\sqrt{512} = 16\sqrt{2}i$

d'où $z' = \dfrac{8 - 16i\sqrt{2}}{32} = \dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $z' = \dfrac{8 + 16i\sqrt{2}}{32} = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $z' = \dfrac{\overline{q}}{4}$ et $z'' = \dfrac{q}{4}$

b. On pose $Z = z^2$

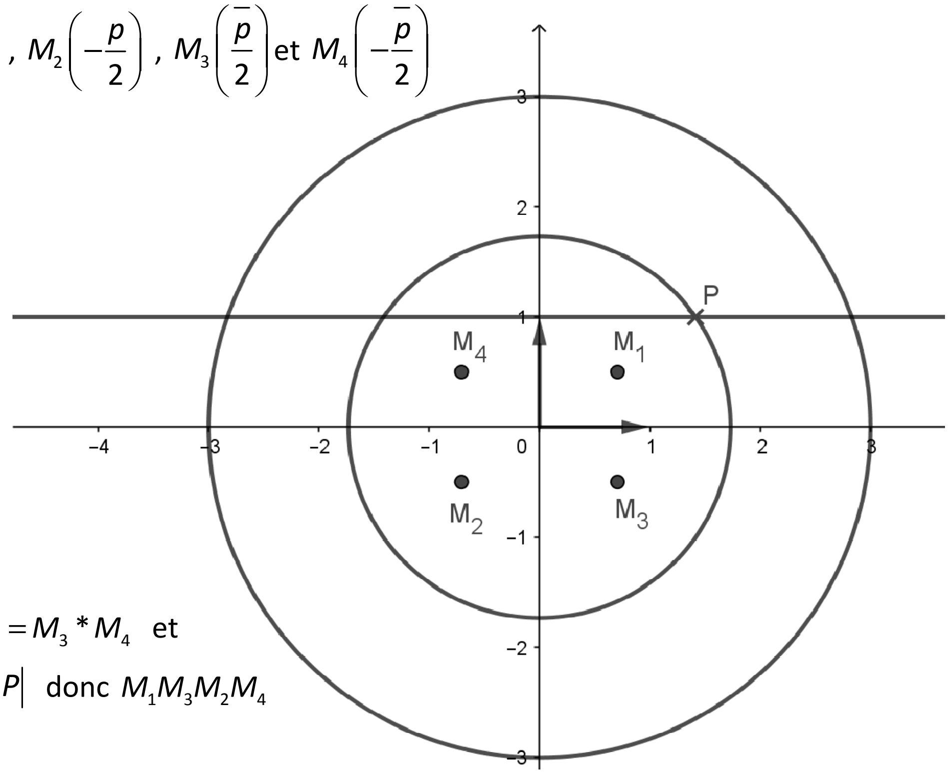
On a z solution de (E') équivaut à $Z^2 - 8Z + 9 = 0$ équivaut à $Z = \dfrac{q}{4}$ ou $Z = \dfrac{\overline{q}}{4}$

équivaut à $z^2 = \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ ou $z^2 = \dfrac{\overline{p^2}}{4} = \left(\dfrac{\overline{p}}{2}\right)^2$

équivaut à $z = \dfrac{p}{2}$ ou $z = -\dfrac{p}{2}$ ou $z = \dfrac{\overline{p}}{2}$ ou $z = -\dfrac{\overline{p}}{2}$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{p}{2}; -\dfrac{p}{2}; \dfrac{\overline{p}}{2}; -\dfrac{\overline{p}}{2}\right\}$

2. a. On a $M_1\left(\dfrac{p}{2}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{p}{2}\right)$, $M_3\left(\dfrac{\overline{p}}{2}\right)$ et $M_4\left(-\dfrac{\overline{p}}{2}\right)$



b. On a $M_1 * M_2 = M_3 * M_4$ et $M_1M_2 = M_3M_4 = |P|$ donc $M_1M_3M_2M_4$ est un rectangle

Exercice n°3:

De quoi s'agit-il ?

- **Utiliser un graphique**
- **Fonction en exponentielle (limites, variations, branches infinies)**
- **Calcul d'aires**
- **Fonctions primitives**

A. 1. a. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2 - xe^x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\dfrac{(x+1)^2}{x} - e^x\right] = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^2 - xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{(x+1)^2}{x} - e^x\right] = -\infty$

donc (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

b. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2 - xe^x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\dfrac{(x+1)^2}{x^2} - \dfrac{e^x}{x}\right] = -\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2 - xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\dfrac{(x+1)^2}{x^2} - \dfrac{e^x}{x}\right] = -\infty$

donc (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2(x+1) - e^x - xe^x = 2(x+1) - e^x(x+1) = (x+1)(2-e^x)$$

b. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \ln 2$ et on a $2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$

d'où

x	$-\infty$		-1		$\ln 2$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-e^x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	e^{-1}	↗	$1+(\ln 2)^2$	↘	

3. a. On a $f'(0) = g'(0) = 1$ et $f(0) = g(0) = 1$ d'ou $T: y = x+1$

b. Puisque (Γ) est au dessus de (Δ) donc $e^x-(x+1)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

autrement : Soit $h: x \mapsto e^x-(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $h'(x)=e^x-1$ d'où

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'où $h(x)=e^x-(x+1)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

4.

a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x-f(x)=e^x-(x+1)^2+xe^x=(x+1)(e^x-x-1)$

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)-f(x)=xe^x-x^2-x=x(e^x-x-1)$

c. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x-f(x)=(x+1)(e^x-(x+1))=0 \iff x=-1$ ou $x=0$ d'où

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$e^x-f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Conclusion : Γ au dessous de (C_f) pour tout $x\in\,]-\infty;-1[$

Γ au dessus de (C_f) pour tout $x\in\,]-1;+\infty[\setminus\{0\}$

Γ coupe (C_f) aux points $(-1;e^{-1})$ et $(0;1)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+1)-f(x)=x(e^x-(x+1))=0 \iff x=0$ d'où

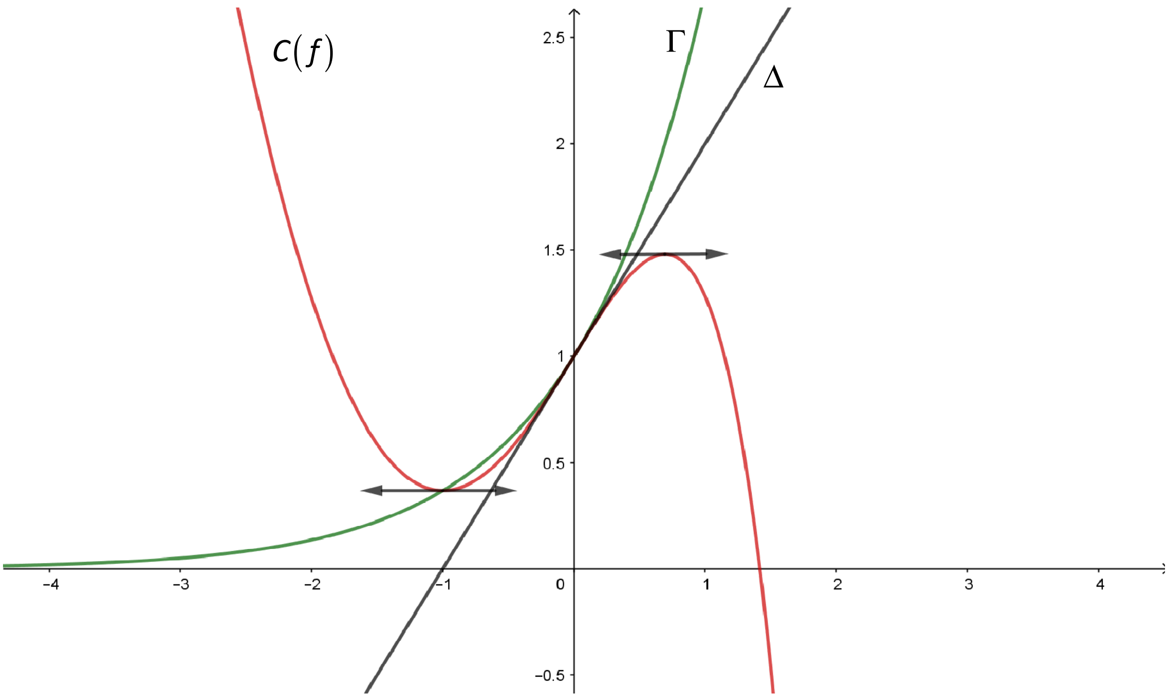
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(x+1)-f(x)$		$-$	0	$+$	

Conclusion : Δ au dessous de (C_f) pour tout $x\in\,]-\infty;0[$

Δ au dessus de (C_f) pour tout $x\in\,]0;+\infty[$

Γ coupe (C_f) au point $(0;1)$

5.



6. On a

$$A=\int_{-1}^{0}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}e^{x}+xe^{x}-x^{2}-2x-1dx=\left[xe^{x}-\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-x\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{e}+\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{3}$$

Exercice n°4:

De quoi s'agit-il ?

- **Utiliser un graphique**
- **Fonction** $\sqrt[n]{}$
- **Suites** $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ **(monotonie, résonnement par récurrence , absurde, convergence)**

1. Soit $M(x;y)\in\wp\setminus\{O\}$

   On a $M\in(C)\cap(D)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}g(x)=x\\ x>0\end{cases}\ \Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{4x}=x\\ x>0\end{cases}\ \Leftrightarrow x^{3}=4\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$

   d'où $\alpha=\sqrt[3]{4}$

2.
   a. On a $u_0=4$, $u_1=f(4)=1$, $u_2=f(1)=2$ et $u_3=f(2)=\sqrt{2}$ donc

   $u_1<u_3<u_2<u_0$

   b. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$

   Pour $n=0$ on a $u_0=4>0$

   Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose $u_n>0$ et montrons que $u_{n+1}>0$

   On a $u_{n+1}=f\left(u_n\right)=\dfrac{2}{\sqrt{u_n}}>0$

   Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$

   c. Soit $n\in\mathbb{N}$, si $u_{n+1}\le u_n$ alors $0<\sqrt{u_{n+1}}\le\sqrt{u_n}$ d'où $\dfrac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ ainsi

   $\dfrac{2}{\sqrt{u_{n+1}}}\ge\dfrac{2}{\sqrt{u_n}}$ donc $u_{n+2}\ge u_{n+1}$

   d.

   Puisque si $u_{n+1}\le u_n$ alors $u_{n+2}\ge u_{n+1}$ donc $\left(u_n\right)$ n'est pas décroissante

Et si $u_n \le u_{n+1}$ alors $0 < \sqrt{u_n} \le \sqrt{u_{n+1}}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \le \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ d'où $u_{n+2} \le u_{n+1}$

donc (u_n) n'est pas croissante

Conclusion : (u_n) n'est pas monotone

3. Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$,

$$f\left(f(x)\right) = f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{x}}}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x}} = 2^{\frac{2}{4}} x^{\frac{1}{4}} = (4x)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4x} = g(x)$$

4.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(v_n) = f\left(f(u_{2n+1})\right) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} = v_{n+1}$

$$g(w_n) = f\left(f(u_{2n})\right) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = w_{n+1}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le v_{n+1} \le \alpha \le w_{n+1} \le w_n$

Pour $n = 0$, on a $u_1 < u_3 < \alpha < u_2 < u_0$ d'où $v_0 < v_1 < \alpha < w_1 < w_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n$

montrons que $v_{n+1} < v_{n+2} < \alpha < w_{n+2} < w_{n+1}$

on a $0 < v_n < v_{n+1} < \alpha < w_{n+1} < w_n$ et g croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ donc

$g(v_n) < g(v_{n+1}) < g(\alpha) < g(w_{n+1}) < g(w_n)$ d'où $v_{n+1} < v_{n+2} < \alpha < w_{n+2} < w_{n+1}$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le v_{n+1} \le \alpha \le w_{n+1} \le w_n$

c. On a (v_n) est une suite croissante et majorée par α donc convergente vers $\ell \in \left[0;+\infty\right[$ et puisque $v_{n+1} = g(v_n)$ et g continue sur $\left[0;+\infty\right[$ d'où $g(\ell) = \ell$ équivaut à $\ell \in \{0;\alpha\}$ et puisque $v_n \ge v_0 = 1 > 0$ d'où $\ell > 0$ ainsi $\ell = \alpha$

On a (w_n) est une suite décroissante et minorée par α donc convergente vers $\ell \in \left[0;+\infty\right[$ et puisque $w_{n+1} = g(w_n)$ et g continue sur $\left[0;+\infty\right[$ d'où $g(\ell) = \ell$ équivaut à $\ell \in \{0;\alpha\}$ et puisque et puisque $0 < \alpha \le w_n \le w_0 = 4$ d'où $\ell > 0$ donc $\ell = \alpha$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \alpha$ équivaut à $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$