# Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences de l'informatique)
# Session de contrôle 2018

**Exercice 1 :** (4 points)

1) $detA=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad detA=-7\neq 0$ donc $A$ est inversible

2)a) $A^2=A\text{x}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A^3=A^2\text{x}A=\begin{pmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & -9 & 3 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ ; $A^3-A^2=\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}=-7\,I_3$

c) $A^3-A^2=-7\,I_3$ donc $A\left(\frac{A^2-A}{-7}\right)=I_3$ donc $A^{-1}=\frac{-1}{7}(A^2-A)$

3)a) $\begin{cases} -x-2y+z=3 \\ x+y+z=7 \\ 2x-y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\text{x}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-10}{7} \\ \frac{16}{7} \\ \frac{43}{7} \end{pmatrix}$ donc $S_{IR^3}=\left\{\left(\frac{-10}{7},\frac{16}{7},\frac{43}{7}\right)\right\}$

**Exercice 2 :** (4,5 points)

1)a) $p(C)=\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$

b) $p(D)=n\text{x}\left(\frac{3}{6}\right)\text{x}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{2^n}$

2)a) $p(A)=p(\overline{C})=1-p(C)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$

b) $p(B)=\left(\frac{3}{6}\right)^n+\frac{n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$

c) A∩B : "obtenir des boules de couleurs différentes" et "obtenir ou plus une boule blanche" donc A∩B : obtenir une seule boule blanche donc A∩B =D donc p(A∩B )=p(D)

3)a) $U_{n+1}-U_n=2^n-(n+2)-2^{n-1}+(n+1)=2^n-n-2-2^{n-1}+n+1$
$=2^{n-1}(2-1)-1=2^{n-1}-1$

Or $n\geq 2$ donc $n-1\geq 1$ donc $2^{n-1}\geq 2^1$ donc $U_{n+1}-U_n\geq 2^1-1$ donc $U_{n+1}-U_n\geq 2$ donc $U_{n+1}-U_n\geq 0$ $(U_n)$ est croissante

b) $U_2=-1$ , $U_3=0$ , $U_4=3$ et comme $(U_n)$ est croissante donc $U_n$ s'annule uniquement pour $n=3$

4) p(A∩B )$=p(A)\text{x}\,p(B) \Leftrightarrow \frac{n}{2^n}=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{n+1}{2^n}\right) \Leftrightarrow n=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)(n+1)$

$\Leftrightarrow n=n+1-\frac{n+1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow 2^{n-1}=n+1 \Leftrightarrow U_n=0 \Leftrightarrow n=3$

**Exercice 3 :** (5,5 points)

1)$(E) : 5x - 26y = 1$

a)$5\text{x}(-5) - 26\text{x}(-1) = 1$ donc$(-5, -1)$ est une solution de (E)

b) )$(E) : 5x - 26y = 1$

$5\text{x}(-5) - 26\text{x}(-1) = 1$ donc $5x - 26y = 5\text{x}(-5) - 26\text{x}(-1)$

donc $5(x + 5) = 26(y + 1)$ donc 5 divise 25(y+1) or $5 \wedge 26=1$

donc 5 divise $y + 1$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 5k$

26 divise $5(x + 5)$ or $5 \wedge 26=1$ donc 26 divise $x + 5$ donc il existe k' $\in \mathbb{Z}$ tel que

$x + 5 = 26k'$ soit $x = 26k' - 5$

***Réciproquement***

On a $5(x + 5) = 26(y + 1)$ donc $5\text{x}26k' = 26\text{x}5k$ donc $k = k'$

donc $S_{\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}} = \{(26k - 5{,}5k - 1), k\in\mathbb{Z}\}$

**Autrement :**

$(x, y)$ est solution de $(E) \Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et $5\text{x}(-5) - 26\text{x}(-1) = 1$

$\Leftrightarrow 5(x + 5) = 26(y + 1) \quad \Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et 5 divise $26(y + 1) \Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 5k$ car $5 \wedge 26=1 \Leftrightarrow y = -1 + 5k$ et $x = -5 + 26$ ; $k \in \mathbb{Z}$

2)a) à F on associe 5 et le reste de la division euclidienne par 5x5+2 par 26 est 1 ; la lettre associée à 1 est B.

b)BAC est codé HCM

3)a)$5n + 2 \equiv m[26]$ <=> $21(5n + 2) \equiv 21m[26]$ <=>$n - 10 \equiv 21m[26]$

<=>$n \equiv 21m + 10[26]$

b)On définit un procédé de décodage de la façon suivante :

-A la lettre que l'on veut décoder , on associe l'entier m correspondant dans le tableau

-On calcule le reste de la division euclidienne de $21m + 10$ par 26 que l'on note n

-A l'entier n , on associe la lettre correspondante dans le tableau

c) Ok est le mot dont le code est UA.

**Exercice 4 :** (6 points)

1)$f(x) = \frac{x}{lnx}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{-1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

$C_f$ admet une branche parabolique de direction (o,$\vec{\imath}$) au voisinage de $(+\infty)$

2)a) $f'(x) = \dfrac{\ln x - x.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

b) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 \Leftrightarrow \quad x = e$

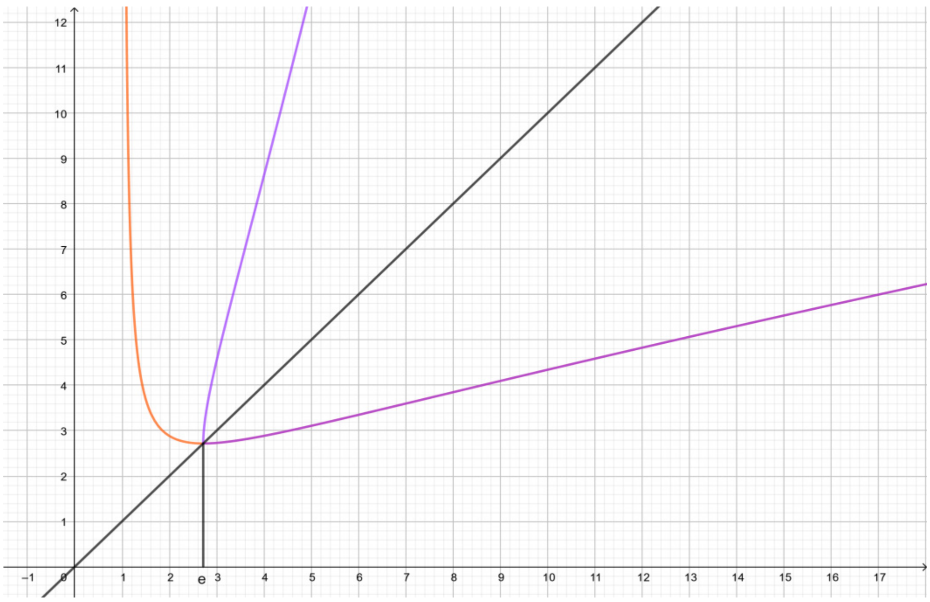
| x | 1 | e | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f '(x) | — | 0 | + |
| f(x) | $+\infty$ ↘ | e | ↗ $+\infty$ |

$f(e) = e$

c) $f$ continue et strictement croissante sur $[e, +\infty[$ => $f$ réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur

$[f(e), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[ = [e, +\infty[$

3)




4) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) pour n=0 , $U_0 = 3 \geq e$

soit $n \in \mathbb{N}$ , supposons que $U_n \geq e$ montrons que $U_{n+1} \geq e$

On a $U_n \geq e$ et $f$ strictement croissante sur $[e, +\infty[$ donc $f(U_n) \geq f(e)$ donc $U_{n+1} \geq f(e)$

**Conclusion** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq e$

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \dfrac{U_n(1-\ln(U_n))}{lnU_n} \leq 0$ car $U_n \geq e$ donc $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout $n$

donc $(U_n)$ est décroissante

c) $(U_n)$ est décroissante et minorée par e donc $(U_n)$ est convergente, soit $l$ sa limite.

$U_{n+1} = f(U_n)$ $U_n$ est convergente vers $l$ or $U_n \geq e$ donc $l \geq e$ donc

f est continue en $l$ donc $f(l) = l$ donc ln $(l) = 1$ donc $l = e$

5)a)$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1 - \frac{2}{lnx}) = \frac{lnx-1}{ln^2x} = f'(x)$

b)$f'(x) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(1 - \frac{2}{lnx})^2 \leq 0$ donc $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$

6)a)f est dérivable sur $[e, +\infty[$ et $\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [e, +\infty[$

**<u>I.A.F</u>** $U_n \epsilon [e, +\infty[$ , e $\in [e, +\infty[$ donc $\left|f(U_n) - f(e)\right| \leq \frac{1}{4}|U_n - e|$

donc $|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|U_n - e|$

b)pour n=0 , $|U_0 - e| \leq \frac{1}{4^0}$

soit $n \in \mathbb{N}$ , supposons que $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ montrons que $|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$

On a $|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|U_n - e|$

$\leq \frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{4^n}$

$\leq \frac{1}{4^{n+1}}$

**<u>Conclusion :</u>** pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$

c)On a $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{4^n} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \infty} U_n - e = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \infty} U_n = e$